

Szálas struktúrák mechanikai modellezése: káosz és fraktálok

MTA doktori értekezés

Dr. Károlyi György

Budapest, 2006.

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék	i
Ábrák jegyzéke	iii
1. Bevezetés	1
1.1. A kutatás előzményei, időszerűsége	2
1.1.1. Rugalmas rúdláncok és térbeli káosz	2
1.1.2. Fraktálok szerepe a nyitott áramlásokban zajló aktív folyamatokban . .	6
1.1.3. Növekvő szálak és szálas struktúrák	11
1.2. A dolgozat célkitűzései	16
1.3. Az értekezés szerkezete	17
2. Rugalmas rúdláncok és térbeli káosz	18
2.1. Szimbolikus dinamika és klasszikus invariánsok	18
2.2. Térbeli káosz és periodikus pályák	24
2.3. Konzervatív térbeli káosz nemkonzervatív terhek esetén	32
3. Nyitott áramlások, fraktálok, aktív folyamatok	38
3.1. Passzív sodródás nyitott áramlásokban	38
3.2. Kémiai reakció nyitott áramlásokban	46
3.3. Szálas fraktálok és planktonok nyitott áramlásban	50
4. Növekvő szálak és szálas struktúrák	59
4.1. Növekvő síkbeli görbék és a hifa	59
4.2. Kolónianövekedés és időben változó fraktálok	65
4.3. Kémiai reakciók zárt áramlásban	71
5. Az eredmények összefoglalása, tézisek	77
Köszönetnyilvánítás	82
Irodalomjegyzék	83

Ábrák jegyzéke

1.1.	A rugalmas rúdlánc modellje	3
1.2.	A rugalmas rúdlánc és az Euler-rúd bifurkációs diagramja	4
1.3.	Áramvonalak a Kármán-féle örvényútban	7
1.4.	Sodródó részecskék pályája a Kármán-féle örvényútban	8
1.5.	Részecskepályák a kétfolyós kádban	9
1.6.	Cantor-szálak	10
1.7.	A <i>Streptomyces coelicolor</i> elágazásai	13
1.8.	A <i>Streptomyces coelicolor</i> által termelt antibiotikum	15
2.1.	Klasszikus invariánsok az Euler-feladat estén	20
2.2.	Klasszikus invariánsok a rugalmas rúdlánc esetén	20
2.3.	Az (α, y) fázistér partíciója	21
2.4.	A zérushelyek és a delta-címke kapcsolata	23
2.5.	A stabilitás és a szimbolikus dinamika kapcsolata	23
2.6.	A szimmetriák és a delta-címkek kapcsolata	24
2.7.	A rugalmas rúdlánc egyensúlyi helyzeteinek száma	25
2.8.	A konzolos rugalmas rúdlánc modellje	26
2.9.	Konzolos rugalmas rúdlánc bifurkációs diagramja	28
2.10.	Konzolos rugalmas rúdlánc egyik egyensúlyi helyzete	29
2.11.	Rúdláncalak és periodikus pálya	29
2.12.	A konzolos rugalmas rúdlánc egyensúlyi helyzeteinek száma	31
2.13.	Kezdőfeltételek szétterülése a konzolos rugalmas rúdlánc fázisterében	31
2.14.	Konzolos rugalmas rúdlánc fázisportréja	33
2.15.	Követőerővel terhelt rugalmas rúdlánc bifurkációs diagramja	34
2.16.	Megoszló erővel terhelt konzolos rugalmas rúdlánc bifurkációs diagramja	37
3.1.	Sodródó részecskék időkézése a kétfolyós kádban	40
3.2.	Kaotikus halmaz és sokaságai a kétfolyós kádban	41
3.3.	Az instabil sokaság időbeli változása a kétfolyós kádban	42
3.4.	Festékcsepp kirajzolja az instabil sokaságot	43
3.5.	Mintázatok légkörben és óceánban	44
3.6.	Festékcsepp az instabil sokasághoz tart a kétfolyós kádban	45
3.7.	Műholdas felvételek planktonvirágzásról	52
3.8.	Planktonfaj a Kármán-féle örvényútban	53

3.9. Planktonfaj egyedszáma a Kármán-féle örvényútban	54
3.10. Planktonfaj a kétnyelős kádban	54
3.11. Versengő planktonfajok a Kármán-féle örvényútban	56
3.12. Versengő fajok a kétnyelős kádban	58
4.1. Gombafonal hosszmetsete	60
4.2. A növekvő hifa geometriája.	60
4.3. A hifa egy „gyűrűjének” ΔA felszíne az ábrán színezéssel jelölve.	62
4.4. Hifa alakja	64
4.5. A tápanyagfelvétel vázlata	65
4.6. A kolónia fraktáldimenziója	67
4.7. A biomassa időbeli változása	69
4.8. Pillanatfelvételek a szimulált növekvő kolóniáról	70
4.9. Kémiai reakció zárt áramlásban	72
4.10. Van-e fraktál zárt áramlásban?	73
4.11. Kémiailag aktív anyag mennyisége zárt áramlásban	75
4.12. Kémiailag aktív anyag effektív dimenziója zárt áramlásban	76

1. fejezet

Bevezetés

Szálas struktúrák a természetben a legkisebbtől a legnagyobbig minden méretben előfordulnak: a DNS-molekuláktól és a szálas baktériumoktól a gombafonalakon és mérnöki rúdszerkezeteken át a többszáz kilométeres planktonvirágzás-mintázatokig. Ebben a dolgozatban ezen struktúrák közül vizsgálunk meg néhányat, és ezek mechanikai modellezésével foglalkozunk.

A dolgozatban szálas struktúrán olyan alakzatokat értünk, amelyeknek lényeges tulajdonsága, hogy egyik térbeli kiterjedése lényegesen meghaladja a másik kettőt. A mérnöki gyakorlatban ilyen szerkezetek a rudak, rúdszerkezetek, és a dolgozatnak ilyen szerkezetek képezik az egyik fő témáját: az eredmények egyik része rugalmas rúdláncok kihajlási feladataival kapcsolatos. Már korábban ismert, hogy a rugalmas rúdláncok egyensúlyi helyzetei nyomóterhelés hatására igen bonyolultak lehetnek, és ismert az is, hogy ennek oka egy kaotikus dinamikai rendszerrel való analógia. Ezen analógia alapján szokás a bonyolult térbeli „viselkedést”, vagyis a bonyolult alakot a *térbeli káosz* névvel jelezni. A dolgozatban ezt az analógiát és a térbeli káosz elnevezést is részletesebben megvizsgáljuk. Rá fogunk mutatni, hogy ezt az elnevezést, a káosz és a térbeli káosz kapcsolatát nem is olyan egyszerű pontosan megragadni. Megvizsgáljuk azt is, hogy térbeli káosz lehetséges-e nemkonzervatív erővel terhelt rúdláncok esetében is: a korábbi eredmények mindig a konzervatív erők esetét vizsgálták. Azt is vizsgálni fogjuk, hogy a bonyolult egyensúlyi helyzetek leírására hagyományosan alkalmazott *klasszikus invariánsok* (stabilitás, szimmetriák, zérushelyek száma) kiválthatók-e egy korábban már bevezetett, a káosz és a térbeli káosz analógiáját kihasználó jellemzővel, a szimbolikus dinamikán alapuló címkézéssel.

A másik rendszer, ahol a szálas struktúrák jelentős szerepet kapnak, a hidrodinamikai áramlásokban zajló kaotikus sodródás jelensége. Ismert, hogy a folyadékban sodródó részecskék mozgása nem követi a folyadék áramvonalait, ha az áramlás sebességtére időfüggő. Ez lehetővé teszi, hogy a sodródó részecskék mozgása sokkal bonyolultabb legyen, mint az áramlási kép. Még ha az áramlás maga időben periodikus, akkor is előfordulhat, hogy a sodródó részecskék mozgása rendkívül bonyolult, kaotikus lesz. A kaotikus rendszerek egy jól ismert tulajdonsága, hogy a kezdőfeltételek egy adott halmazát rövid idő alatt *nyújtások és hajtogatások* sorozatának teszi ki, és ezáltal bonyolult *szálas* szerkezetűvé alakítja. Ezt nagyon egyszerű ellenőrizni folyadékáramlások esetében: kezdjük lassan tejszínt keverni egy csésze kávéban, és a szálas alak a szemünk láttára bontakozik ki. Amennyiben az áramlás *nyitott*, vagyis a vizsgált tartományba van beáramlás, majd onnan a keveredés után kisodródnak a részecskék, akkor

a szálas struktúrák egy *fraktáلالakzatot* alkotnak. A keveredés okozta szálas szerkezetnek lényeges szerepe lehet a gyakorlatban igen sok esetben: a víztárolókban lappangó régi és friss víz eloszlásában, a szennyeződések (olajfoltok, szennyvíz) eloszlásában stb. A dolgozatban azt vizsgáljuk, hogy a keveredés okozta szálas szerkezetek milyen szerepet játszanak, ha a sodródó részecskék *aktívak*: kémiai reakciókban vesznek részt, vagy biológiailag aktívak. Ennek jelentős szerepe lehet az égési folyamatokban, a motorok vizsgálatában, tervezésében, a mikroáramlásokban (pl. számítógépes nyomtatókban), légkörkémiailag folyamatokban, óceáni áramlásokban élő planktonpopulációk életében, általában a környezetvédelem számos területén.

A dolgozat harmadik részében azt vizsgáljuk, hogy milyen jellegzetességei vannak a *növekedő* szálas struktúráknak. Először egy általános kinematikai leírását adjuk növekedő görbéknek. Ez modellezheti például egy *szálas baktérium* vagy egy *gombafonal* növekedését is egy egyszerű biológiai feltevés mellett. Ezután megmutatjuk, hogy ha nemcsak egy szál növekedését vizsgáljuk, hanem pl. szálakból álló teljes baktériumkolónia vagy gombatelep növekedését, akkor is figyelembe kell venni, hogy a telep szálakból áll. Ezek a szálak egy *időben változó fraktálmintázatot* alkotnak, és a telep növekedését ez jelentős mértékben meghatározza. Az időben változó fraktálság ötlete azonban nemcsak itt alkalmazható. Megmutatjuk, hogy *zárt áramlásokban* zajló aktív folyamatok esetén is az teszi lehetővé kémiai egyenletek felírását, ha figyelembe vesszük, hogy az áramlás mechanikai törvényszerűségei időben változó szálas struktúrák felbukkanását okozzák.

A Bevezetés következő részében a fent vázolt területeken már korábban ismert eredményeket foglaljuk össze, és felsoroljuk, hogy melyek azok a kérdések, amelyeket a dolgozatban meg kívánunk válaszolni.

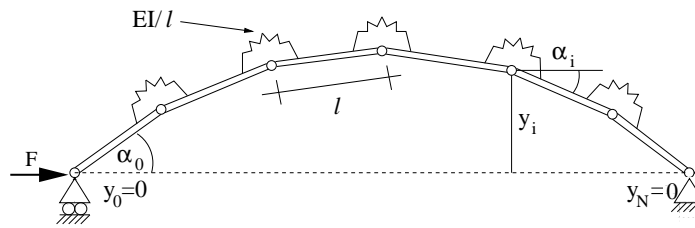
1.1. A kutatás előzményei, időszerűsége

1.1.1. Rugalmas rúdláncok és térbeli káosz

A dolgozat egyik fő témája a rugalmas rudak kihajlásának vizsgálata. Eredetileg (Gáspár és Domokos, 1989) ez a modell azt volt hivatott szemléltetni, hogy a folytonos szerkezetek numerikus modellezése (pl. végeselemmódszer, diszkrétéleemes módszer stb.), ami óhatatlanul együtt jár a szerkezet diszkrétizálásával, milyen nem várt hibákat okozhat. Olyan *parazita* megoldások bukkanhatnak fel, amelyek a diszkrét rendszernek valódi megoldásai, azaz pl. a rugalmas rúdláncnak valódi egyensúlyi helyzetei, de az eredeti folytonos feladatnak egyik megoldására sem hasonlítanak. Ez a jelenség más folytonos feladatok diszkrétizálása kapcsán is felmerült (Gaines, 1974; Peitgen *et al.*, 1981; Hegedűs, 1986; Gáspár és Németh, 2004).

Az eredetileg vizsgált rugalmas rúdlánc a jól ismert *Euler-feladat* diszkrétizálásával áll elő. Az Euler-feladat egy végein nyomóerővel terhelt rugalmas, karcsú rúd egyensúlyi helyzeteivel foglalkozik, és Euler (1744) a feladatot több, mint két és fél évszázaddal ezelőtt lényegében meg is oldotta. A rugalmas rúdlánc ennek a feladatnak a matematikai, és egyben a mechanikai értelemben vett diszkrétizálásával is megkapható (Domokos és Holmes, 1993). Ha az Euler-feladat egyenleteit a megfelelő módon differencia-egyenletté alakítjuk, akkor éppen az 1.1 ábrán látható rugalmas rúdlánc egyensúlyi és geometriai egyenleteit kapjuk (Domokos és Holmes, 1993). A rugalmas rúdlánc N darab végtelenül merev rúdelemből áll, amelyeket nyomatékbí-

ró rugók kapcsolnak csuklósan össze. A rugókban ébredő nyomaték a legegyszerűbb esetben arányos a két összekapcsolt rúdelem relatív elfordulásával, a rugóállandó ρ . Az így kialakított rugalmas rúdlánc egyik végét az 1.1 ábrán egy fix csukló rögzíti a talajhoz, a másik vége szabadon el tud mozdulni a két végpontot összekötő vonal mentén. A legegyszerűbb, korábban is vizsgált esetben a terhelő erő, F , ezen a görgős csuklóval megtámasztott végen hat, ahogy azt az 1.1 ábra mutatja. A későbbiekben ennél bonyolultabb, teljesen általános (akár nemkonzervatív) terhelést is meg fogunk vizsgálni, és megengedünk nemlineáris kapcsolatot a rúdelemek relatív elfordulása és az összekötő rugókban ébredő nyomatékok között.



1.1. ábra. A rugalmas rúdlánc modellje.

A rugalmas rúdlánc alakját egyértelműen jellemezni lehet a csuklóknak az eredeti, terheletlen helyzettől mért függőleges eltolódásával (az ábrán y_i), valamint a rúdelemek vízszintessel bezárt szögével (az ábrán α_i). A rúdelemek hossza a legegyszerűbb, korábban is vizsgált esetben azonos (az ábrán ℓ), később tekintünk majd eltérő hosszúságú elemekből felépített láncot is.

A rugalmas rúdlánc egyensúlyi helyzeteinek vizsgálatához írjuk fel az egyensúlyi és geometriai egyenleteit! A geometriai egyenletek az egyes rúdelemek helyzetét írják le: $y_{i+1} = y_i + \ell \sin \alpha_i$. Az egyensúlyi egyenletek az első i rúdelem nyomatéki egyensúlyát írják le: $\rho(\alpha_i - \alpha_{i+1}) = F y_{i+1}$. Az egyenleteket dimenziótlan alakban is fel lehet írni, ha bevezetjük a $\lambda = F\ell/\rho$ dimenziótlan teherparamétert, és az $y_i \rightarrow \ell y_i$ változócserével dimenziótlan távolságokra térünk át (a nyíl itt, és később hasonló esetekben azt jelenti, hogy az egyenletekben y_i helyébe ℓy_i -t írva az új y_i dimenziótlan lesz, ℓ egységekben mérjük). Ezzel az egyenletek

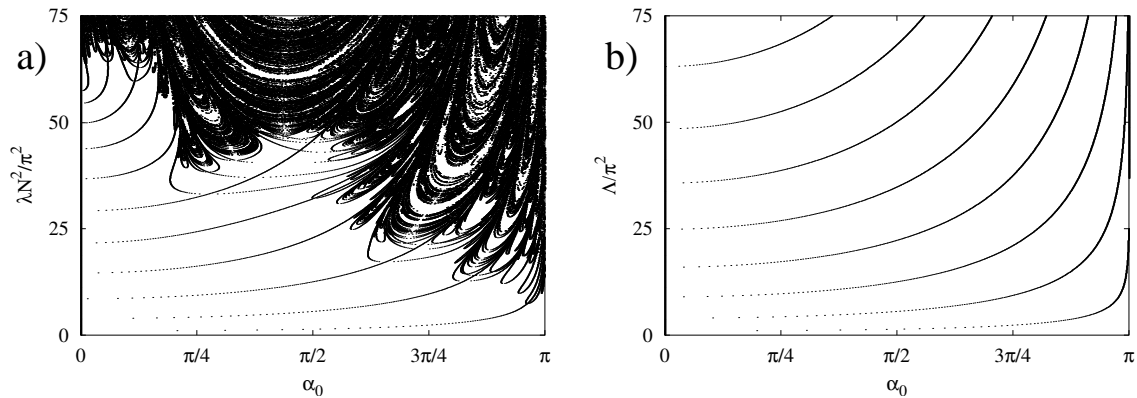
$$y_{i+1} = y_i + \sin \alpha_i, \quad \alpha_{i+1} = \alpha_i - \lambda y_{i+1} \quad (1.1)$$

alakba írhatók (Károlyi és Domokos, 1999). Emellett ki kell róni a peremfeltételeket is, amelyek szerint a két támasz nem mozdulhat el a terhelés egyeneséről:

$$y_0 = 0 = y_N. \quad (1.2)$$

A lehetséges egyensúlyi helyzetek megtalálására a következő módszer kínálkozik (Domokos és Holmes, 1993). Válasszunk kis lépésekben növekvő α_0 kezdőszögeket, és legyen $y_0 = 0$. Ezután az (1.1) egyenleteket alkalmazva sorjában az N rúdelemre, kiszámítható y_N mindegyik α_0 kezdőszöghöz. Ha valamelyik $y_N = 0$, vagyis kielégíti az (1.2) peremfeltételt, akkor a hozzá tartozó α_0 egy egyensúlyi alakot határoz meg. Ha két egymást követő α_0 -hoz eltérő előjelű y_N tartozik, akkor a két kezdőszög közti tartomány finomításával tetszőleges pontossággal meghatározható egy megoldás.

Az α_0 kezdőszög egyértelműen meghatároz egy megoldást, hiszen az (1.1) egyenletek segítségével az összes többi rúdelem helyzete meghatározható. Ez lehetővé teszi egy *globális bifurkációs diagram* szerkesztését: ezen egy adott N elemszám esetén minden λ teherparaméterhez feltüntetve azon α_0 kezdőszögeket, amelyek egyensúlyi helyzetet határoznak meg, megkapjuk a szerkezet *egyensúlyi útjait*. Ilyen bifurkációs diagramot mutat az 1.2a ábra egy $N = 12$ elemű rugalmas rúdlánc esetére (Gáspár és Domokos, 1989; Domokos és Holmes, 1993; Károlyi és Domokos, 1998, 1999). Összehasonlításként az 1.2b ábra az eredeti, folytonos Euler-feladat hasonló bifurkációs diagramját mutatja.



1.2. ábra. a) $N = 12$ elemű rugalmas rúdlánc bifurkációs diagramja. b) Az Euler-rúd bifurkációs diagramja. A függőleges tengelyen a teherre jellemző értékek szerepelnek, a vízszintes tengelyen a kezdőszög. Az Euler-rúd esetén a Λ dimenziótlan teherparaméter értéke $\Lambda = FL^2/EI$, ahol F a teher értéke, L a rúd hossza, EI a hajlítómerevsége.

Látható, hogy az Euler-feladat bifurkációs diagramjához képest a rugalmas rúdláncé sokkal bonyolultabb. Hogy ennek az okát megértsük, tudni kell, hogy mindkét feladat matematikai alakja, vagyis a hozzájuk tartozó peremérték-feladat, megfeleltethető egy-egy kezdetiérték-feladatnak. A peremérték-feladat és a megfelelő kezdetiérték-feladat között az a kapcsolat, hogy az egyenletek azonos alakban írhatók, de a peremérték-feladat ívhossz vagy elemszám változójának a kezdetiérték-feladatban az (esetleg diszkrét) idő felel meg, és peremfeltételek helyett kezdőfeltételeket adunk meg. Az Euler-feladat egyenleteinek megfelelő kezdetiérték-feladat a *matematikai inga* (Thompson és Virgin, 1988; El Naschie, 1990), ami egy jól ismert reguláris (nem kaotikus) dinamikai rendszer. Ezzel szemben a rugalmas rúdlánc egyenletei megfelelnek a *standard leképezésnek* (Domokos és Holmes, 1993), ami egy jól ismert kaotikus dinamikai rendszer (Lichtenberg és Liebermann, 1982). Megjegyezzük, hogy a rudak egyensúlyi alakjai és a pörgettyű dinamikája közti *Kirchhoff-analógia* már régóta ismeretes volt (Kirchhoff, 1859; Love, 1893; Antman, 1995), az Euler-rúd és az inga közti analógia ennek speciális esete.

Az egyensúlyi helyzetek és egy dinamikai rendszer viselkedése között fennálló analógia jogossá tette, hogy a sok bonyolult egyensúlyi alakot mutató szerkezetekre azt mondjuk, hogy azok a *térbeli káosz* állapotában vannak (Mielke és Holmes, 1988; Thompson és Virgin, 1988; El Naschie, 1990; Davies és Moon, 1993; Hunt *et al.*, 1997). A térbeli káosz elnevezést más,

hasonló esetekben is alkalmazták már, nemcsak a rugalmas rúdláncok bonyolult egyensúlyi helyzeteire: például folyadékáramlás állandósult mintázatai esetében (Eguíluz *et al.*, 1999) és általános matematikai vizsgálatokban (Albeverio és Nizhnik, 2001) időfüggő rendszerek állandósult állapotainak leírására.

A teher növelésével a bonyolult rúdláncalakoknak megfelelő egyensúlyi utak a bifurkációs diagramon mind az $\alpha_0 = 0$ illetve az $\alpha_0 = \pi$ helyzethez tartanak (Domokos, 1997). Az egyensúlyi helyzetek „kilapulnak”, megmutatható (Domokos, 1997), hogy az összes α_i szög π egész számú többszöröse lesz: $\alpha_i = k_i\pi$, $k_i \in \mathbb{Z}$, ahol \mathbb{Z} az egész számok halmaza. Ez az eredmény lehetővé tette (Károlyi, 1998; Károlyi és Domokos, 1999), hogy a bifurkációs diagram egyensúlyi útjait *egyértelműen* címkézni lehessen. A címkék a következőképpen állíthatók elő. Az N rúdelem végtelen nagy λ értékénél felvett $\alpha_i = k_i\pi$ értékéből csak a k_i ($i = 1, \dots, N$) egész értékeket megtartva egy N egész számból álló címkét kapunk. Megmutattuk (Károlyi, 1998; Károlyi és Domokos, 1999), hogy ezek a címkék nemcsak végtelen nagy λ teher esetén jellemzik a rugalmas rúdlánc alakját, hanem minden egyensúlyi úthoz létezik egy minimális teher, ami felett a rúd alakja „kellően lapos”, és a címkét úgy is megkapjuk, hogy az α_i szögek milyen egész k_i számok esetén vannak legközelebb $k_i\pi$ -hez. Ez azt is jelenti, hogy a rugalmas rúdlánc egyes egyensúlyi útjait olyan címkékkel sikerült ellátni, amelyet egyszerűen le lehet olvasni az egyensúlyi helyzet alakjára ránézve. Fontos hangsúlyozni, hogy az egyensúlyi utak címkézése egyértelmű, azaz adott teher esetén a címke elvileg minden információt hordoz az egyensúlyi alakról. Ez nagyon alkalmassá teszi ezt a címkét, hogy kiváltsa az egyensúlyi utak jellemzésére klasszikusan használt módszereket. Ezek a klasszikus módszerek az egyensúlyi alak stabilitásán (Maddocks, 1984; Coleman és Swigon, 2000), szimmetriáin (Healey, 1988a,b; Wohlever és Healey, 1995), illetve zérushelyeinek számán (Crandall és Rabinowitz, 1970; Healey és Kielhöfer, 1991, 1993) alapulnak. Mivel megmutatható, hogy a címkézés a megfelelő dinamikai feladat *szimbolikus dinamikájával* rokon, ezért a címkézést *szimbolikus dinamikán alapuló címkézésnek* neveztük el (Károlyi, 1998; Károlyi és Domokos, 1999). Azt is sikerült kimutatni (Károlyi és Domokos, 1999), hogy a bifurkációs diagram egyensúlyi útjait leíró, N darab egész számból álló címkék milyen sorrendben követik egymást. A bifurkációs diagramon, adott λ és N mellett α_0 növelésével sorra véve az egyes egyensúlyi utakat, egyesével változik a címkék utolsó, N -edik eleme (k_N), majd néha az utolsó előtti (k_{N-1}) is változik eggyel, majd még ritkábban az azt megelőző (k_{N-2}), és így tovább. Ennek segítségével megadtuk az egyensúlyi utakat jellemző címkék teljes sorrendjét (Károlyi és Domokos, 1999). Már csak az a kérdés maradt megválaszolatlan, hogy vajon a klasszikus invariánsok meghatározható-e a címkézés segítségével, azaz megadja-e a címke, hogy az egyes egyensúlyi utakhoz tartozó rúdláncalakok stabilak-e, milyen szimmetriájuk van, és mennyi zérushelyük van. Ennek a kérdésnek az eldöntése lesz a dolgozat egyik célkitűzése.

A címkézés bevezetésével kihasználtuk a statikus peremérték-feladat és a megfelelő dinamikai rendszer közötti kapcsolatot. Arra is utaltunk, hogy a bonyolult alakokat eredményező statikai feladatot akkor nevezik térben kaotikusnak, ha a neki megfeleltethető dinamikai rendszer időben kaotikus. Nehézségeket okozhat azonban annak eldöntése, hogy egy rendszer a térbeli káosz állapotában van-e. A kezdetiérték-feladatokban az idő tetszőlegesen hosszú lehet, és annak eldöntése, hogy a rendszer kaotikus-e, vagy sem, elvileg a végtelen hosszú ideig vizsgált viselkedés alapján dönthető el, a kaotikus viselkedést leíró mennyiségek (Ljapunov-exponens,

topologikus entrópia stb.) mind végtelen hosszú időre átlagolt mennyiségek (Ott, 1993; Tél és Gruiz, 2002). A dolgozatban vizsgált következő kérdés az lesz, hogy vajon lehet-e kritériumot adni arra, hogy mikor nevezhető egy peremérték-feladat térben kaotikusnak.

A rugalmas rúdláncok vizsgálata során jellemzően konzervatív terhelésekkel foglalkoztak. Habár a folytonos rudak vizsgálata során felbukkannak nemkonzervatív terhek (pl. Beck, 1952; Szabó, 1999, 2000, 2003; Bou-Rabee *et al.*, 2002), a diszkrét esetben igen kevés ilyen tanulmányról tudunk (Popper, 1978; Szabó, 2001). Éppen ezért a dolgozat célja, hogy megvizsgálja, hogy vajon általános, konzervatív vagy nemkonzervatív teher esetén milyen kezdetiérték-feladat tartozik a rugalmas rúdlánc egyensúlyát leíró peremérték-feladathoz, konzervatív marad-e ekkor a megfelelő dinamikai rendszer. Megvizsgáljuk azt is, hogy ekkor is fellép-e térbeli káosz.

1.1.2. Fraktálok szerepe a nyitott áramlásokban zajló aktív folyamatokban

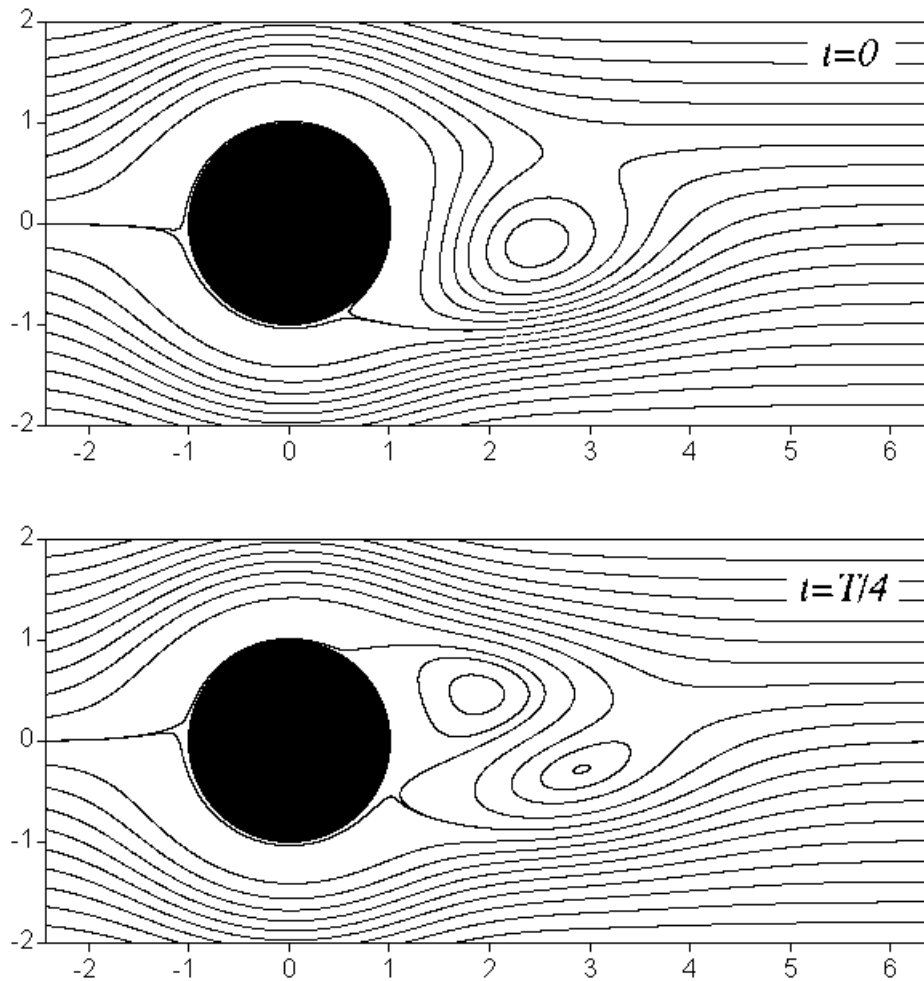
A káoszelmélet egyik leglátványosabb alkalmazási területe, a részecskék kaotikus sodródása folyadékáramlásokban, az utóbbi időben az érdeklődés középpontjába került (Aref, 1984; Chaiken *et al.*, 1986; Shariff *et al.*, 1988; Solomon és Gollub, 1988; Ottino, 1989; Aref *et al.*, 1989; Ottino, 1990; Rom-Kedar *et al.*, 1990; Shariff *et al.*, 1991; Crisanti *et al.*, 1991; Jung és Ziemniak, 1992; Jung *et al.*, 1993; Sommerer és Ott, 1993; Elhmaidi *et al.*, 1993; Ziemniak *et al.*, 1994; Jana *et al.*, 1994; Aref, 1994; Ottino *et al.*, 1995; Péntek *et al.*, 1995a,b,c; Stolovitzky *et al.*, 1995; Péntek *et al.*, 1996; Sommerer *et al.*, 1996; Károlyi és Tél, 1997; Toroczkai *et al.*, 1997; Rom-Kedar és Poje, 1999; Giona *et al.*, 1999; Giona és Adrover, 2001). A legegyszerűbb eset a részecskék *passzív sodródása*, amikor a folyadék pontszerű, tehetetlenül sodródó részecskéket szállít. Ekkor a mozgásegyenlet azt fejezi ki, hogy az r helyen levő részecske \dot{r} sebessége megegyezik a folyadék $v(r, t)$ sebességével:

$$\dot{r}(t) = v(r(t), t). \quad (1.3)$$

A változók feletti pont a t idő szerinti deriválást fejezi ki. Megmutatható, hogy ha a folyadék mozgása időtől függetlenül állandó, vagyis $v(r(t), t) \equiv v(r(t))$, akkor a részecskék által befutott $r(t)$ pálya azonos az áramlási tér áramvonaláival, és így az nem lehet bonyolult, ha az áramlás is egyszerű, nem turbulens. Ha azonban az áramlás expliciten időfüggő, már más a helyzet: a részecskék nem az áramvonalakat követik, azokról letérnek, és az (1.3) differenciálegyenletnek lehetnek *kaotikus megoldásai*. Az utóbbi évtizedben világossá vált, hogy még egyszerű időfüggést mutató (pl. időben periodikus) áramlások esetén is a sodródó részecskék mozgása tipikusan kaotikus (pl. Péntek *et al.*, 1996; Károlyi és Tél, 1997).

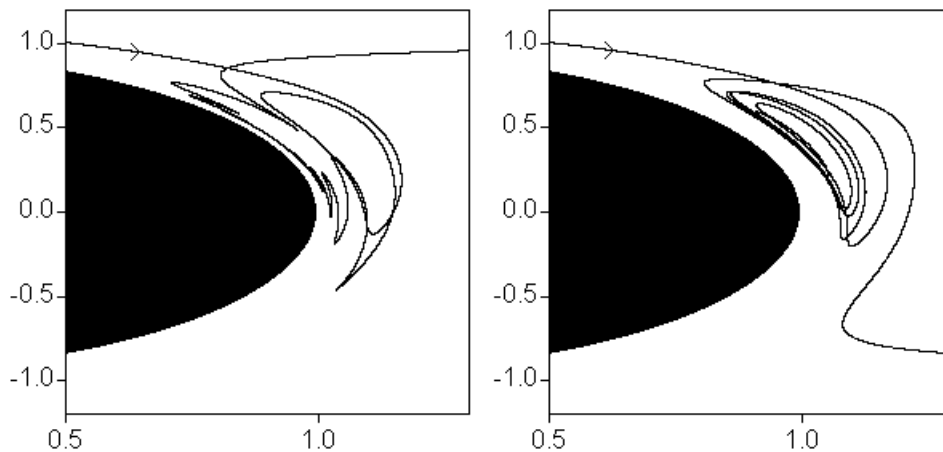
Különös érdekességgel bír a részecskék kaotikus sodródása *nyitott* folyadékáramlásban (Shariff *et al.*, 1988; Aref *et al.*, 1989; Rom-Kedar *et al.*, 1990; Shariff *et al.*, 1991; Jung és Ziemniak, 1992; Jung *et al.*, 1993; Ziemniak *et al.*, 1994; Stolovitzky *et al.*, 1995; Péntek *et al.*, 1995a,b,c, 1996; Sommerer *et al.*, 1996; Toroczkai *et al.*, 1997; Károlyi és Tél, 1997; Rom-Kedar és Poje, 1999). Az áramlást akkor nevezzük nyitottnak, ha egy véges megfigyelési tartományon keresztül folyó áramlásról van szó (Lamb, 1932). Ekkor az áramlás abban

az értelemben nyitott, hogy a megfigyelési tartományba behatoló folyadék csak bizonyos ideig tartózkodik ott, aztán továbbhalad, miközben újabb folyadéktömegek hatolnak a vizsgált tartományba. Ha az áramlás időfüggő a megfigyelési tartományban, akkor az ide besodródó részecskék kaotikus mozgást végezhetnek, de csak véges ideig: a folyadék összenyomhatatlansága miatt *majdnem minden* részecskének véges idő alatt el kell hagynia a vizsgált véges méretű tartományt (Károlyi és Tél, 1997). Ez azt jelenti, hogy a részecske viselkedése tipikusan tranziensen kaotikus. Ezért a nyitott áramlásban tehetetlenül sodródó részecskék leírására jól alkalmazható a *tranzienk káosz* elmélete (Tél, 1990).



1.3. ábra. A Kármán-féle örvényút áramvonalai $t = 0$ és $t = T/4$ időpontokban, ahol T az áramlás periódusideje. Az áramvonalak $t = T/2$ ($t = 3T/4$) időpontban a $t = 0$ ($t = T/4$) időpontbeli áramvonalak vízszintes tengelyre vett tükörképei. A folyadék balról jobbra áramlik. Az első fél periódus alatt a henger felső részének közelében keletkezik egy örvény, miközben egy korábban született örvény kihal a viszkózitás miatt. A második fél periódus alatt ennek pont a fordítottja zajlik. Az áramlás számítógépes szimulálásához a Jung *et al.* (1993) által bevezetett modellt használtuk.

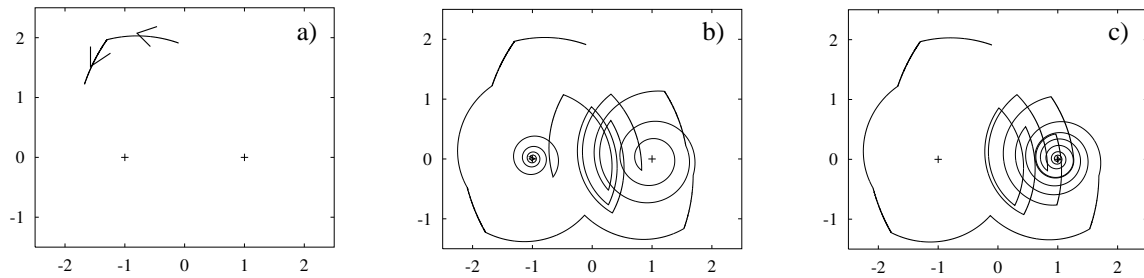
Az 1.3 ábra egy tipikus nyitott áramlást mutat: egy hengeres akadály körül áramló folyadék áramvonalai láthatók. A folyadék balról jobbra mozog, miközben a henger hátsó faláról időben periodikusan örvények válnak le, ha a Reynolds-szám néhány száz körül van (Ziemiak *et al.*, 1994). Ezek a leváló örvények alakítják ki a *Kármán-féle örvényutat*, majd ahogy tovasodródnak, a folyadék viszkozitása miatt kihálnak. Az áramlás nyitott, hiszen a távolról érkező folyadék mozgása időben változó az akadály környékén mielőtt tovasodródna. Habár ez az áramlás időben periodikus, nem turbulens, a sodródó részecskék mozgása nagyon bonyolult lehet. Ahogy azt az 1.4 ábra mutatja, a részecskepályák nagyon érzékenyek a pontos kezdőfeltételekre: a kis kezdeti eltérések gyorsan megnőnek, és tipikusan *exponenciálisan* távolodó pályákon futó részecskéket eredményeznek. A közeli kezdőfeltételekkel indított pályák távolodását jellemző exponens a σ *Ljapunov-exponens* (Ott, 1993; Tél és Gruiz, 2002): két részecske távolsága tipikusan $\Delta r(t) \approx \Delta r(0)e^{\sigma t}$. A pályák kezdetben nagyon hasonlóak, szabad szemmel nem is látható a különbség, de végül eltérnek egymástól, és nagyon különböző helyeken hagyják el az akadály környékét. Ez a kezdőfeltételekre való nagyfokú érzékenység a kaotikus dinamikai rendszerek sajátossága.



1.4. ábra. Sodródó részecskék pályája a Kármán-féle örvényútban. A megfigyelési tartományt vízszintesen megnyújtottuk, hogy láthatóbb legyen, mi történik a henger mögött. A folyadék balról jobbra áramlik. Kis kezdeti eltérés a részecskék helyzetében nagyon eltérő pályákhoz vezet, ami a kaotikus viselkedés jellemzője.

Egy másik példát az 1.5 ábra mutat: egy tartály két lefolyóval. Amikor az egyik lefolyó nyitva van, a távozó folyadék forog (pl. a Coriolis-erő hatására), azaz a lefolyók *nyelő örvények*. Ez a nyelő örvény egyszerű modellje lehet például a fürdőkád lefolyójának. Ebben a példában két lefolyó van, amelyek felváltva működnek: az első fél periódus alatt csak a bal oldali lefolyó működik (1.5a ábra), mialatt a sodródó részecskék spirál pályán közelednek a lefolyóhoz. Aztán a következő fél periódus alatt csak a jobb oldali lefolyó működik, és a részecskék most ehhez a lefolyóhoz közelednek spirálisan. Ez a két fél periódus ismétli önmagát, mialatt egy sodródó részecske az 1.5b ábrán mutatott pályát futja be. Az 1.5c ábra egy kicsit megváltoztatott kezdhelyzetből indított részecske pályáját mutatja, a gyorsan növvő eltérések megint a kaotikus

viselkedésre utalnak. Ezt az egyszerű modellt Aref *et al.* (1989) dolgozták ki, tulajdonságait részletesen a 3.1. alfejezetben fogjuk vizsgálni Károlyi és Tél (1997) munkája alapján. Ez is nyitott áramlás, hiszen a lefolyóktól távoli helyzetből induló részecskék a lefolyók környékén erősen időfüggő áramlásba kerülnek, majd a lefolyókon keresztül távoznak az áramlásból, és így a megfigyelési tartományból is.



1.5. ábra. Sodródó részecske pályája a kétfolyós kádban. Az áramlás két lefolyóból (nyelő örvények, az ábrán fekete kereszttel jelölve) áll, amelyek felváltva működnek. a) Az első fél periódus alatt a sodródó részecske logaritmikus spirál mentén közeledik a baloldali nyelőhöz, majd a következő fél periódus alatt a jobb oldalihoz vezető spirálon halad tovább. b) A teljes részecskepálya logaritmikus spirálok rövid szakaszaiból áll. c) A b) képtől kicsit eltérő kezdőfeltételek nagyon eltérő pályákat adnak: a részecske másik lefolyón keresztül távozik.

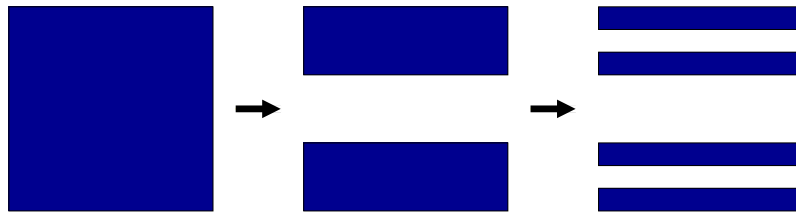
További példákat, modelleket sokan mások is kidolgoztak, lásd pl. Shariff *et al.* (1988); Aref *et al.* (1989); Rom-Kedar *et al.* (1990); Shariff *et al.* (1991); Jung és Ziemniak (1992); Jung *et al.* (1993); Ziemniak *et al.* (1994); Stolovitzky *et al.* (1995); Péntek *et al.* (1995a,b,c, 1996); Sommerer *et al.* (1996); Toroczkai *et al.* (1997); Rom-Kedar és Poje (1999) munkáit. Mindegyik példában azt lehet látni, hogy a nyitott, kaotikus áramlások minden esetben erős, de nem tökéletes keveredést okoznak, ami a sodródó részecskék *szálas fraktáeloszlásához* vezet (Jung *et al.*, 1993; Ziemniak *et al.*, 1994; Péntek *et al.*, 1995a,b,c, 1996; Toroczkai *et al.*, 1997; Károlyi és Tél, 1997). Ezt Sommerer *et al.* (1996) laboratóriumi kísérletekben is ellenőrizték.

A fraktálok rendkívül bonyolult geometriai struktúrák. Nagyon nagy kerület/terület, vagy felület/térfogat arány jellemzi őket, emiatt bármilyen aktív folyamatot jelentősen fel tudnak erősíteni. A fraktálok bonyolult geometriáját nem lehet a hagyományos geometriai eszközökkel jellemezni. Példaként az 1.6 ábrán egy egyszerű fraktálhalmaz készítésének első lépései láthatók. Ez egy egységnyi hosszú és egységnyi széles „csíkból” indul, amelynek a középső harmadát eltávolítjuk az első lépésben. Ezzel két csík marad, amelyek szélessége $1/3$. A következő lépésben a megmaradó sávok középső harmadát távolítjuk el, így négy sáv marad, amelyek szélessége $1/9$. Ezt a szabályt végtelen sokszor alkalmazva kapjuk meg a fraktálhalmazunkat, amely különálló szakaszokból, szálakból áll: ezek száma nem megszámlálhatóan végtelen. A letakart felület zérus, de a kerület végtelen nagy. Valóban, próbáljuk megmérni a lefedett területet és a szakaszok hosszát! A területmérés egy módja, hogy lefedjük a halmazt ϵ oldalhosszúságú négyzetekkel („dobozokkal”), ekkor a lefedett terület $A(\epsilon) = \epsilon^2 N(\epsilon)$, ahol $N(\epsilon)$ a lefedéshez szükséges dobozok száma. Ez a terület természetesen függ ϵ -től, de azt re-

méljük, hogy ha egyre kisebb dobozokat veszünk, azaz $\epsilon \rightarrow 0$, akkor a mért terület az igazi lesz: $A(\epsilon) \rightarrow A$. Hasonlóan, a kerület hossza becsülhető $L(\epsilon) = \epsilon N(\epsilon)$ -nal. Az 1.6 ábra alapján kiszámítható $N(\epsilon)$: válasszuk a dobozméretet $\epsilon = (1/3)^n$ -nak, ahol n tetszőleges egész, ekkor $1/\epsilon = 3^n$ doboz kell egy szál lefedéséhez, és az n -edik szinten 2^n ilyen szál van. Ezzel $N(\epsilon) = 6^n$ adódik, vagyis a lefedett terület $A(\epsilon) = (6/9)^n$, ami nullává válik, ha $n \rightarrow \infty$ ($\epsilon \rightarrow 0$). Másrészt, $L(\epsilon) = (6/3)^n$, ami végtelen nagy lesz, ha $n \rightarrow \infty$ ($\epsilon \rightarrow 0$). A különös viselkedés oka az, hogy az 1.6 ábrán mutatott objektum „kevesebb”, mint egy síkidom, de „több”, mint egy egyszerű vonal. Ilyen objektumokra egy újfajta dimenziót lehet definiálni, amely jól jellemzi a bonyolult struktúrát, de hagyományos alakzatokra a szokásos dimenziót adja (Mandelbrot, 1977). Ennek megfelelően, legyen D egy alakzat *fraktáldimenziója*, ha az ϵ oldalhosszú dobozok minimális száma, amely az alakzat teljes lefedéséhez szükséges,

$$N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D} \quad (1.4)$$

módon viselkedik, ha $\epsilon \rightarrow 0$. Egy alakzatot akkor nevezünk *fraktálnak*, ha az ily módon definiált dimenziója nem egész szám. Habár léteznek ennél bonyolultabb, de pontosabb definíciók a fraktáldimenzióra (Mandelbrot, 1977; Falconer, 1990), mi D -t fogjuk fraktáldimenziónak nevezni, mert az esetek túlnyomó többségében, amelyeknek gyakorlati jelentősége van, a fenti definíció ugyanazt az eredményt szolgáltatja.



1.6. ábra. Egy szálas fraktál, a Cantor-szálak előállítás. Az első lépésben az egységnyi élű alakzat harmadát távolítjuk el. Aztán a megmaradt sávok harmadát vágjuk ki. Ezt a szabályt követve vízszintes szakaszok maradnak, melyek függőleges metszete a jól ismert *Cantor-halmaz* (Mandelbrot, 1977; Tél, 1988; Falconer, 1990). Az alakzat fraktáldimenziója (1.4) alapján $D = \ln 6 / \ln 3 \approx 1.631$.

Megjegyezzük, hogy ezek a szálas fraktálstruktúrák ilyen pontosan csak diffúziómentes esetben jelennek meg nyitott áramlásokban. A diffúzió hatására lesz egy olyan alsó méretskála, amely alatt a fraktálszerkezetet a diffúzió „kisimítja”. Ennek hatása azonban a legtöbb esetben elhanyagolható, mert a diffúziónál sokkal jelentősebb keverő hatást fejt ki az áramlás, a diffúziós méretskála sokkal kisebb, mint az áramlás általi keverés méretskálája.

A 3.1. alfejezetben a kétfolyós kád egyszerű példáján keresztül megvizsgáljuk, hogy milyen általános tulajdonságai vannak a nyitott áramlásoknak, miként bukkannak fel a sodródó részecskék által benépesített szálas fraktálmintázatok. Látni fogjuk, hogy ezek a szálas fraktálmintázatok az 1.6 ábrán mutatott Cantor-szálakhoz hasonló szerkezetet mutatnak.

A kémiai reakciókat hagyományosan olyan reakcióegyenletekkel szokás leírni, amelyek a reakciókban résztvevő anyagok átlagos koncentrációját tartalmazzák. Sok esetben ez a megközelítés már bizonyította létjogosultságát. Az utóbbi időben azonban egyre több olyan feladat

vizsgálatát kell(ene) elvégezni, ahol a kémiaiilag aktív anyagok *nem* egyenletesen vannak elosztva abban a tartományban, ahol az aktív folyamatok (kémiai reakciók) zajlanak. A leggyakrabban ilyen esetekben valamilyen áramlás okozza a reagáló anyagok keveredését: ilyenkor a keveredés meglehetősen jó lesz, de *nem tökéletes*, azaz a kémiai egyenletek nem írhatók fel pusztán a reagáló anyagok átlagos koncentrációira alapozva. Ilyen esetek a gyakorlatban legtöbbször a légkörkémiában, égések során, motorokban fordulnak elő, vagy például vizes környezetben sodródó plankton-populációk esetében. Felmerül a kérdés, hogy a nyitott áramlásokban felbukkanó szálas fraktáلالakzatoknak milyen hatása van a kémiai aktivitásra, vajon a hagyományos kémiai egyenlet és látásmód ilyenkor is érvényes-e. Ennek a kérdésnek a megválaszolása lesz a dolgozat következő célkitűzése.

A legtöbb természetes élőhelyen rengeteg versengő faj képes együtt élni, miközben rendszerint viszonylag kevés forrás (pl. táplálék, oxigén, fény stb.) korlátozza a szaporodásukat. Ez ellentmond a klasszikus elméleteknek, amelyek az egyes forrásokat legrátermettebben felhasználó fajokon kívül az összes többi kipusztulását jósolják homogén környezetben.

Az egyik legjellemzőbb példa, ahol a kompetitív kizorítás (Gause és Witt, 1935; Hardin, 1960) ellentmond a tapasztalatnak, a fitoplankton-kolóniák esetében mutatkozik meg, ezt nevezzük *plankton-paradoxonnak* (Hutchinson, 1961). A fitoplanktonok a tengerekben, tavakban élő mikroszkopikus növényi élőlények összessége, és rendkívül jelentős szerepet töltenek be a földi oxigénháztartásban, hiszen a legjelentősebb CO₂-fogyasztók és O₂-termelők. Számos vizsgálat javasolt megoldást a plankton-paradoxonra, amennyiben megmutatták, hogy különféle mechanizmusok léteznek – pl. környezeti inhomogenitások, ragadozók jelenléte, külső zavarok, együttes evolúció stb. –, amelyek a biodiverzitást fenn tudják tartani (Connell, 1978; Wilson, 1990). A fentiek alapján azonban felmerül a kérdés, hogy vajon az áramlások mechanikai sajátosságai által megjelenő szálasság, fraktalitás vajon nem elegendő inhomogenitás-e ahhoz, hogy önmagában is biztosítani tudja a versengő fajok együttélését. Ennek eldöntése lesz a dolgozat újabb célkitűzése.

1.1.3. Növekvő szálak és szálas struktúrák

Az áramlásokban zajló biológiai aktivitás nem az egyetlen módja fraktálkolóniák létrejöttének. Ahogy azt Obert *et al.* (1990); Patankar *et al.* (1993); Lejeune és Baron (1997); Boddy *et al.* (1999) kimutatták, bizonyos mikrobatelepek is mutathatnak komplikált, fonalas fraktálszerkezetet. Ilyen kolóniákat alakítanak ki a prokarióta *Actinomyces* baktériumok és az eukarióta gombák (Prosser és Tough, 1991). Ezek mindegyike rendkívüli számosságban fordul elő a természetben, a talajtól kezdve az emberi testig. Hallatlan elterjedtségük mellett nagy gyakorlati fontosságukat jelzi az is, hogy a világ antibiotikum-, enzim- és citromsav-termelésének jelentős részét ezen *Actinomyces*- és gombatelepek tenyésztésével végzik (Prosser és Tough, 1991; Chater és Losick, 1997; Li *et al.*, 2000).

Nagy gyakorlati hasznuk és elterjedtségük ellenére ezen élőlények növekedésének pontos részletei lényeges részben nem ismertek. Növekedésük több szakaszból áll, amelyek különböző szinten modellezhetők, kezdve a spórák növekedésének beindulásával, folytatva az egyes szálak növekedésének részleteivel, a szálak elágazásának megértésén át a teljes telep növekedési törvényszerűségéig. Mi ebből két szakasz modellezését fogjuk elvégezni. Egyrészt egy

szálnak a növekedését fogjuk vizsgálni, ehhez egy kinematikai vizsgálatot fogunk elvégezni. Másrészt a teljes telep növekedését szereténk modellezni, ehhez a telep fraktáltulajdonságainak figyelembevétele lesz szükséges.

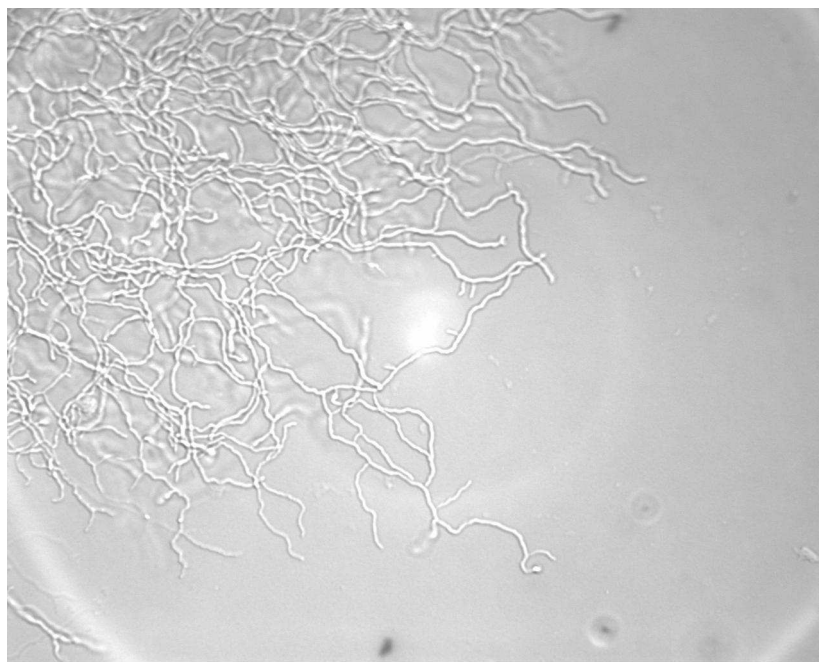
A prokarióta *Actinomycetales* és az eukarióta gombák, a köztük található hatalmas különbségek ellenére, hasonló topológiával és növekedési törvényszerűségekkel rendelkeznek. Életüket spóra állapotban kezdik, amelyből először egy hosszú szál, fonál nő ki, aminek neve *hifa*. Mivel ezek az élőlények másképpen nem képesek helyváltoztatásra, a hosszú szálak növesztésének egyik célja újabb és újabb, tápanyagban gazdag területek felderítése. A szál növekedése gyakorlatilag kizárólag a csúcánál történik (Reinhardt, 1892; Grove és Bracker, 1970; Saunders és Trinci, 1979; Gray *et al.*, 1990; Prosser és Tough, 1991; Chater és Losick, 1997). Ennek oka, hogy ha a szál teljes hossza mentén történne a növekedés, akkor hallatlan nagy súrlódást kellene legyőznie szilárd közegben növekedés esetén, miközben a teljes szál a csúcs felé előre haladna. Tehát csak a csúcánál van növekedés, de ahhoz a szál teljes hossza hozzájárul: a teljes hossz mentén hasznosítja a közegben talált tápanyagot, amelynek egy részét arra fordítja, hogy sejtfalépítő anyagot juttasson a csúcshoz (Saunders és Trinci, 1979; Prosser és Tough, 1991; Bartnicki-Garcia *et al.*, 1989; Regalado *et al.*, 1997; Regalado és Sleeman, 1999). A növekedés biológiai részletei nem ismertek, de valószínűleg eltérnek az *Actinomycetales* és a gomba esetében. A sejtmaggal nem rendelkező, prokarióta *Actinomycetales* esetén valószínűleg a belső folyadéknomás (*turgornyomás*) „felfújja” a szál csúcsát, ahová a sejtfalépítő polimerek beépülnek (Koch *et al.*, 1981; Gray *et al.*, 1990; Prosser és Tough, 1991). Nem teljesen világos, hogy milyen mechanizmus szállítja az építőanyagot a csúcshoz: egyes vélemények szerint (Gray *et al.*, 1990) a diffúzió szerepe jelentős lehet ebben a folyamatban. A gombafonalak sokkal nagyobb átmérővel és hosszal rendelkeznek, és a növekedést szolgáló gépezet is sokkal összetettebb. Habár itt is a belső nyomás az általánosan elfogadott hajtóerő, ennek pontos szerepe és fontossága még vita tárgya (Money, 1997). Valószínűleg a sejtváz is fontos szerepet játszik a sejtfal szétfeszítésében és a hólyagocskákba csomagolt sejtfalépítő polimerek csúcshoz juttatásában (Bartnicki-Garcia *et al.*, 1989; Gray *et al.*, 1990; Prosser és Tough, 1991; Regalado *et al.*, 1997; Regalado és Sleeman, 1999). Egyes megfigyelések szerint a gombák növekedése összefügg egy jól látható, eltérő összetételű folt (ún. *Spitzenkörper*) megjelenésével a csúcs közvetlen közelében (Grove és Bracker, 1970; Bartnicki-Garcia *et al.*, 1989; Prosser és Tough, 1991; Regalado *et al.*, 1997; Regalado és Sleeman, 1999). Mindazonáltal a Spitzenkörper szerepe nem tisztázott, és nem is minden gomba esetén látható (Grove és Bracker, 1970), az *Actinomycetales* hifa esetén pedig még egyáltalán nem figyelték meg.

A biológiai részletek ellenére, a morfológiai hasonlóság a két család között már Reinhardt (1892) úttörő munkája óta nagy érdeklődést keltett. Reinhardt (1892) a *Streptomyces* nevű baktérium növekedéséről végzett részletes megfigyeléseket. A csúcs növekedésére született első modellek pusztán geometriai alapon próbálták közelíteni a csúcs alakját (da Riva Ricci és Kendrick, 1972; Trinci és Saunders, 1977). Ezután két egymással vetélkedő irányzat jött létre. Az egyik modell a felületi feszültség szerepét hangsúlyozza (Saunders és Trinci, 1979; Koch *et al.*, 1981; Koch, 1982; Gray *et al.*, 1990), amely szerint a belső turgornyomás felfújja a csúcsot, és utána épülnek be a falépítő polimerek. A másik elképzelés (Grove és Bracker, 1970; Bartnicki-Garcia *et al.*, 1989; Regalado *et al.*, 1997) a Spitzenkörper szerepét próbálja megfejtani: szerintük ez az esetenként látható folt gyűjtené össze a falépítő polimereket a csúcs közelében, aztán

ez osztja szét a csúcs irányába, miközben valamilyen módon a csúcs felé halad.

Anélkül, hogy ebben a vitában állást kívánnánk foglalni, kidolgozunk egy kinematikai modellt a növekedő síkbeli görbék modellezésére. Ezzel a *növekvő görbével* szeretnénk leírni a szál hosszmetszetének a kontúrját, vagyis a növekvő csúcs alakját. A dolgozatban eldöntendő következő kérdés az lesz, hogy vajon milyen feltevés mellett lehetséges a valódit megközelítő növekvő csúcsokat kapni.

Ha egy baktérium- vagy gombafonal túl hosszúvá nőtt, akkor a csúcs már nem képes a hifa teljes hossza mentén folyamatosan készülő falépítő anyag beépítésére. Ekkor a fonal *elágazik*, és újabb növekedő csúcsok keletkeznek (l. 1.7 ábra). Ez segíti a környezet tápanyagtartalmának minél jobb kihasználását is: végül a rendelkezésre álló területet sűrűn behálózó kolóniát kapunk. Egymást követő elágazások után egy bonyolult geometriájú telep jön létre (1.7 ábra): ennek neve *micélium* (Prosser és Tough, 1991). A növekedés kezdetén a biomassa az idővel lineárisan növekszik, ami hamarosan a sok elágazás miatt exponenciálissá válik (Trinci, 1971; Steele és Trinci, 1975; Prosser és Tough, 1991; Ikasari és Mitchell, 2000). Később a telep közepén, a kolónia legöregebb részén nagyon sűrű lesz a micélium, és a táplálékhiány miatt lelassul a növekedés (Steele és Trinci, 1975; Prosser és Tough, 1991; Ikasari és Mitchell, 2000). Végül a telep közepén teljesen leáll a növekedés, és az csak a telep szélein folytatódik, ahol a tápanyagforrások még nem merültek ki.



1.7. ábra. A *Streptomyces coelicolor* elágazásai (University of Arizona).

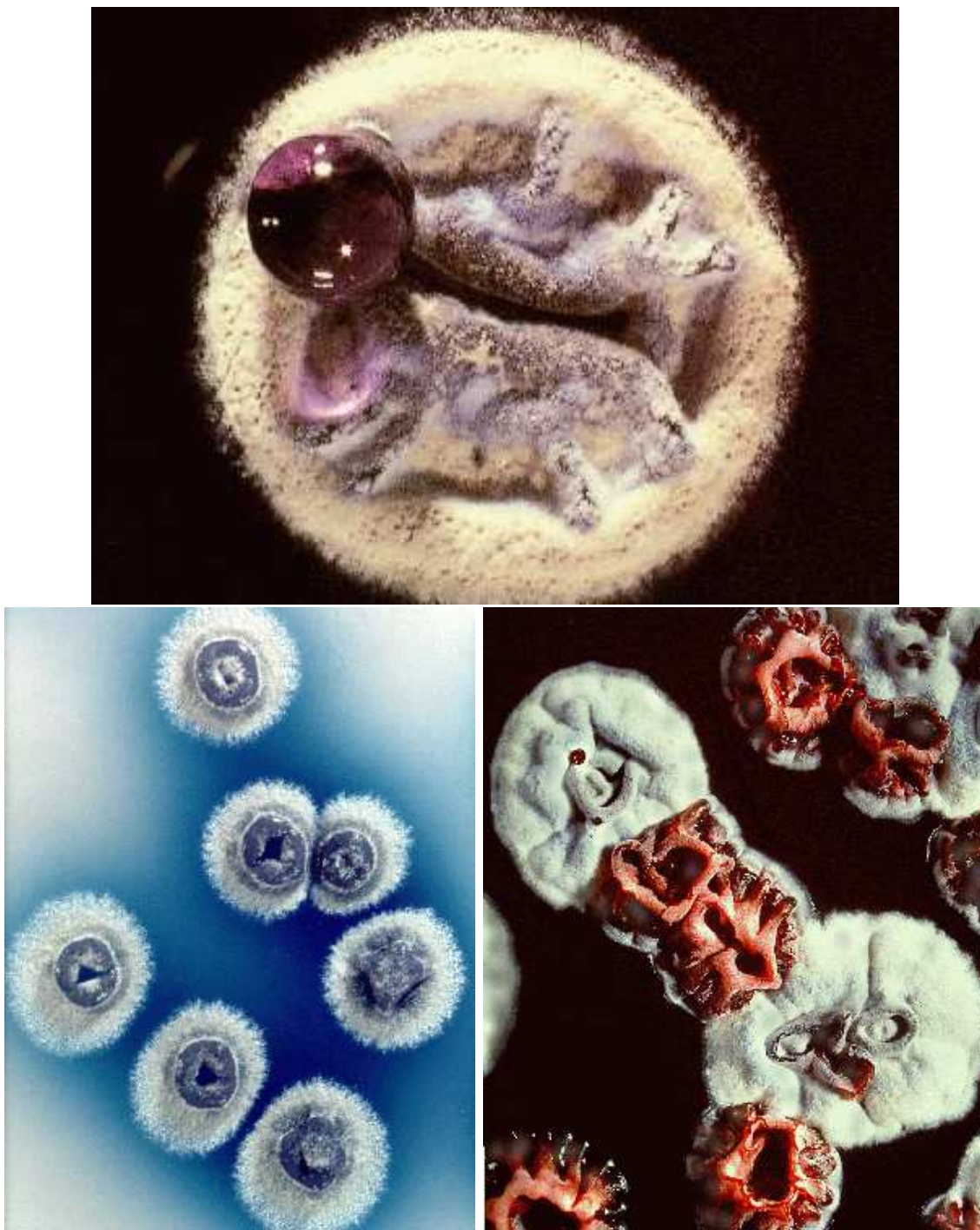
Ebben a végső szakaszban a tápanyaghiány miatt a kolónia közepe bomlásnak indul. A felbomló micélium azonban tápanyagforrást jelent a fejlődés következő szakaszához: a *légi ágak* növesztéséhez (Prosser és Tough, 1991; Chater és Losick, 1997). Szilárd talajon (nem folyadékban) növesztve a légi ágak a felszíntől elfelé növekvő fonalak, amelyek az elhaló micélium

által szolgáltatott tápanyagot használják a növekedéshez. Végül ezek a légi ágak spórákra esnek szét, amelyekből máshol, kedvező körülmények között az életsiklus újra kezdődhet (Prosser és Tough, 1991; Chater és Losick, 1997). A micélium leépülése és a légi ágak növekedése közben kerül sor az antibiotikum-termelésre is: ennek célja, hogy a leépülő kolónia által szolgáltatott tápanyag mérgező legyen a környezetben élő egyéb baktériumok számára, sőt, azokat elpusztítva a légi ágak még több tápanyaghoz jutnak (Chater és Losick, 1997), l. az 1.8 ábrán.

A teljes kolónia növekedésének modellezésére sok modellt dolgoztak ki. A modellek egy része jól meg tudja magyarázni a kezdeti exponenciális növekedést az elágazásos véletlen bo-lyongás ötletéből kiindulva (Prosser és Trinci, 1979; Kotov és Reshetnikov, 1990; Yang *et al.*, 1992a). Ezek között vannak számítógépes modellek (Hutchinson *et al.*, 1980; Yang *et al.*, 1992b) és analitikus eredmények (Prosser és Trinci, 1979; Kotov és Reshetnikov, 1990), amelyek az exponenciális növekedés fázisát paraméterezik. A modellek másik csoportja eleve feltételezi, hogy a telep csak a szélén nő (Pirt, 1967; Trinci, 1971; Edelstein *et al.*, 1983; Georgiou és Shuler, 1986). Ezek a modellek jó leírását adják a kolónia kései, lelassult növekedésének. Habár mérések és számítógépes szimulációk (Lejeune és Baron, 1997) is mutatják a két fázis közti átmenetet, eddig még nem dolgoztak ki olyan analitikus modellt, amely megmagyarázná, hogyan zajlik ez az átmenet.

Megfigyelték, hogy a baktérium- és gombatelepek jól leírhatók a fraktálgeometria módszerével (Obert *et al.*, 1990; Patankar *et al.*, 1993; Lejeune és Baron, 1997; Boddy *et al.*, 1999). Eddig azonban nem történt arra kísérlet, hogy a fraktálság figyelembevételével próbálják meg leírni a növekedést. Ugyanakkor mérések (Obert *et al.*, 1990; Ruzicka *et al.*, 1995) és szimulációk (López és Jensen, 2002) is mutatták, hogy a telepek fraktáldimenziója időben változik. Felmerül a kérdés, hogy vajon lehetséges-e az időben változó fraktáldimenzió ötletét felhasználva olyan modellt kidolgozni, amelyik a teljes telep növekedésének kezdeti, exponenciális, és végső, lelassuló szakaszát is képes leírni. Ez lesz a dolgozat következő célkitűzése.

Időben változó fraktáldimenzió nemcsak a baktérium- és gombatelepek biológiai törvényszerűségei miatt alakulhat ki. A nyitott áramlásban sodródó részecskék kapcsán említettük, hogy azok egy fraktálon gyűlnek össze, amely időben állandó dimenzióval jellemezhető. Felmerül a kérdés, hogy mi a helyzet *zárt* áramlások esetén, vagyis amikor az áramlás zárt tartályban zajlik, ahonnan nincs kiszökés. A szálas struktúrák ilyenkor is megjelennek, gondoljunk csak a kávéban elkevert tejszín mintájára. Azonban a minta ilyenkor nyilvánvalóan nem állandó, a keverés során a részecskék eloszlása egyre homogénebb lesz. Korábbi vizsgálatok (Wonhas és Vassilicos, 2002) alapján felmerül a kérdés, hogy vajon a zárt áramlásokban jellemezhető-e a kialakuló szálas struktúrák a fraktálgeometria eszközeivel, és hogy ezek a struktúrák vajon hogyan befolyásolják a reakcióegyenleteket, ha a sodródó részecskék kémiai-lag aktívak. A dolgozat utolsó célkitűzése ennek a kérdésnek a megválaszolása lesz.



1.8. ábra. *Streptomyces coelicolor* által termelt antibiotikum (John Innes Centre). A felső képen az antibiotikumot a lila csepp tartalmazza, bal oldalon a sötétebb kék szín jelzi a kolónia körül, a jobb oldali képen a vörös részeken gyűlt össze.

1.2. A dolgozat célkitűzései

Az előző részben bemutatott kérdések alapján a dolgozat célkitűzéseit az alábbiak szerint fogalmazhatjuk meg:

1. Meg kívánjuk vizsgálni, hogy a rugalmas rúdlánc egyensúlyi helyzeteit leíró, szimbolikus dinamikán alapuló címkézés segítségével megkaphatók-e az egyensúlyi utak jellemzésére klasszikusan használt jellemzők: a stabilitás, a szimmetriák és a zérushelyek száma.
2. Adjunk egy széles körben alkalmazható módszert annak eldöntésére, hogy egy szerkezet bonyolult egyensúlyi helyzetei térbeli kaotikus rendszerként kezelhetők-e.
3. Vizsgáljuk meg, hogy általános konzervatív vagy nemkonzervatív teher hatására kihajló rugalmas rúdlánc egyensúlyi helyzeteit leíró peremérték-feladatnak megfeleltethető kezdetiérték-feladatnak milyen tulajdonságai vannak.
4. Vizsgáljuk meg, hogy a nyitott hidrodinamikai áramlásokban kaotikusan sodródó részecskék szálas fraktáeloszlása hogyan változtatja meg a hagyományos kémiai egyenleteket.
5. Vizsgáljuk meg, hogy a nyitott áramlások mechanikai tulajdonságai képesek-e olyan inhomogén eloszlást eredményezni, amely a versengő planktonfajok együttélését lehetővé teszi.
6. Adjunk egy általános kinematikai összefüggést a növekedő szálak lehetséges alakjára, és vizsgáljuk meg, hogy hogyan kapható ebből a baktériumszálak és gombafonalak lehetséges alakja.
7. Az időben változó fraktáldimenzió ötletének felhasználásával konstruáljunk modellt a szálas baktérium- és gombatelepek növekedésének modellezésére.
8. Az időben változó fraktáldimenzió ötletét felhasználva vizsgáljuk meg, hogy milyen módon változnak meg a hagyományos reakcióegyenletek a zárt áramlásokban sodródó, kémiailag aktív anyagok esetében.

1.3. Az értekezés szerkezete

A 2. fejezetben a rugalmas rúdláncok egyensúlyi helyzeteivel foglalkozunk. A szimbolikus dinamikán alapuló címkézés segítségével előállítjuk az egyensúlyi helyzeteket jellemző klasszikus invariánsokat. Adunk egy lehetséges megfogalmazást a térbeli káosz jelenségére, és megvizsgáljuk az általános konzervatív és nemkonzervatív terhelés hatását. A kapott eredmények alapján kimondjuk a dolgozat első három tézisét.

A 3. fejezetben a nyitott áramlásokban felbukkanó szálas mintázatokkal foglalkozunk. Egy egyszerű hidrodinamikai modellben megmutatjuk, hogy miként bukkannak fel ezek a szálas fraktálstruktúrák. Megvizsgáljuk, hogy ha a sodródó részecskék kémiaiaktól aktívak, akkor az eloszlásuk fraktáltulajdonsága hogyan módosítja a hagyományos reakcióegyenleteket. Ennek az eredménynek egy lehetséges alkalmazását is megmutatjuk az áramlásban sodródó planktonpopulációk dinamikájára. Látni fogjuk, hogy az áramlás mechanikai tulajdonságai hogyan segítik a biodiverzitást. Ezek alapján újabb két tézist fogalmazunk meg.

A 4. fejezetben a növekedő szálakat és szálas struktúrákat vizsgáljuk. Általános kinematikai egyenleteket írunk fel növekedő szálakra, majd egy lehetséges alkalmazásként a szálas baktériumok illetve gombafonalak növekedését modellezzük. Ezután az időtől függő szálas fraktálok ötletét alkalmazzuk egyrészt baktérium- és gombatelepek növekedésének modellezésére, másrészt zárt áramlásban zajló aktív folyamatok megértésére. Az eredményeket újabb három tézisben összegezzük.

Az utolsó, 5. fejezetben összefoglaljuk a téziseket, és rámutatunk további lehetséges alkalmazásokra is.

2. fejezet

Rugalmas rúdláncok és térbeli káosz

Ebben a fejezetben a rugalmas rúdláncok egyensúlyi helyzeteit vizsgáljuk különféle terhek hatására. Először a végein terhelt rugalmas rúdláncot vizsgáljuk a 2.1 alfejezetben, és megmutatjuk, hogy a globális bifurkációs diagram egyensúlyi útjairól milyen információt ad a szimbolikus dinamikán alapuló címkézés. Utána a 2.2 alfejezetben általános (konzervatív és nem konzervatív) terhek és nemlineáris rugók figyelembevételével meghatározzuk a rúdláncalakokat leíró peremérték-feladatot. Kapcsolatot teremtünk egy dinamikai rendszerek elméletéből származó mennyiség, a topologikus entrópia és az egyensúlyi rúdláncalakok száma között; ez lehetőséget teremt a térbeli káosz jelenségének egy új meghatározására. Végül a 2.3 alfejezetben meghatározzuk az általános esethez tartozó kezdetiérték-feladatot, megvizsgáljuk ennek a tulajdonságait, és néhány speciális esetben meghatározzuk a globális bifurkációs diagramot. Mindegyik alfejezetben egy-egy tézist fogalmazunk meg a bemutatott eredmények alapján.

2.1. Szimbolikus dinamika és klasszikus invariánsok

Az alfejezet eredményei a Kapsza *et al.* (2003) által bemutatott eredményeken alapulnak.

Vizsgáljuk meg először is, hogy a jól ismert Euler-feladat esetén milyen klasszikus invariánsok rendelkeznek az 1.2b bifurkációs diagram egyes egyensúlyi útjaihoz! Nézzük elsőként az egyes ágakhoz tartozó megoldások *zérushelyeinek számát*! Zérushelynek nevezzük a megoldás alakjának azon belső pontjait, amelyek az eredeti konfiguráció egyenesén lesznek a vizsgált egyensúlyi alakban is. Az egyes egyensúlyi utak minden pontjához olyan megoldások tartoznak, amelyek zérushelyeinek száma azonos (Crandall és Rabinowitz, 1970; Healey és Kielhöfer, 1993). Ilyen értelemben nevezzük a zérushelyek számát invariánsnak, azaz a zérushelyek száma nem változik meg egy egyensúlyi út mentén haladva.

Az egyes egyensúlyi helyzetek esetében könnyű meghatározni a zérushelyek számát. A legalsó, a triviális egyensúlyi útról elsőként leágazó ág megoldásai esetében nincs zérushely, a következő ágon egy van, aztán kettő, és így tovább. Jelölje $\mathcal{Z}(i)$ egy adott, rögzített teher mellett az i -edik egyensúlyi úton a megoldások zérushelyeinek a számát! Itt i a megoldás sorszámát jelenti az 1.2b ábra szerint balról jobbra haladva. Legyen $i = 1$ a triviális megoldás, ehhez végtelen nagy $\mathcal{Z}(1)$ tartozna, de ehelyett, az egyszerűség kedvéért, válasszuk ennek értékét $\mathcal{Z}(1) := \mathcal{Z}(2) + 1$ -nek. Így az egyensúlyi utakhoz tartozó $\mathcal{Z}(i)$ értékek egyesével csökkennek,

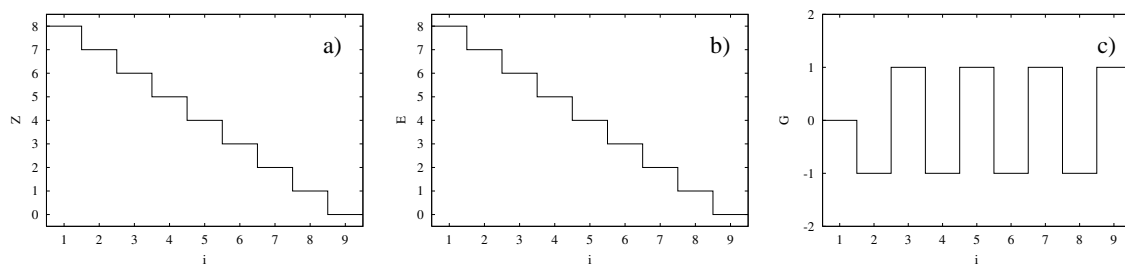
ahogy i növekszik, végül a legutolsó ág esetén nulla lesz az értéke. A $\mathcal{Z}(i)$ függvényt ábrázolva egy egyszerű hisztogramot kapunk, l. a 2.1a ábrán. Megállapíthatjuk, hogy ez az invariáns, a zérushelyek száma, egyértelműen jellemzi a bifurkációs diagram egyensúlyi útjait.

Hasonlóan egyszerű eredményt kapunk, ha az egyes egyensúlyi utak mentén talált megoldások *stabilitását* vizsgáljuk. A nemtriviális egyensúlyi utak vasvilla-bifurkációk sorozatával keletkeznek (l. 1.2b ábrán), és minden ilyen bifurkáció az előzőnél eggyel több negatív sajátértéket eredményez a potenciális energia második deriváltjait tartalmazó Hesse-mátrixban. Vagyis, a legsúlyos, stabil ág esetén zérus a Hesse-mátrix negatív sajátértékeinek száma, aztán a soron következő ágak esetében egyesével nő. Ha tehát bevezetjük az i -edik egyensúlyi útra az $\mathcal{E}(i)$ számot, mint a Hesse-mátrix negatív sajátértékeinek számát, majd ezt mint egy újabb hisztogramot ábrázoljuk egy adott teherérték esetén minden egyensúlyi úthoz, akkor a 2.1b ábrát kapjuk. Megint leolvasható, hogy $\mathcal{E}(i)$ egyértelműen jellemzi az egyensúlyi utakat, tehát az Euler-feladat esetében ez a klasszikus invariáns nagyon jól használható.

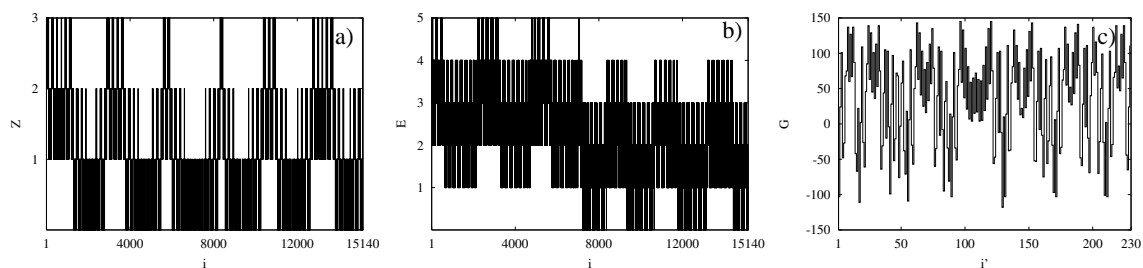
A harmadik klasszikusan alkalmazott invariáns a megoldások alakjának *szimmetriáin* alapul. A megoldások alakjának kétféle egyszerű szimmetriája lehet: vagy tengelyesen szimmetrikusak a középponton átmenő, a szerkezet síkjába eső, az eredeti alakra merőleges egyenesre, vagy középpontosan szimmetrikusak a rúd középpontjára. Ezen kívül lehetnek még részleges eltolási szimmetriával rendelkező alakok is, de ezek nem igazi szimmetriák a rúd véges hossza miatt, ezért ezekkel nem foglalkozunk. A tengelyes és középpontos szimmetriák alapján most is szerkeszthető hisztogram. Sorszámozza i' a valamelyik szimmetriával rendelkező megoldásokat tartalmazó egyensúlyi utakat balról számítva (a triviális ág lesz $i' = 1$). Válasszuk a triviális egyensúlyi úthoz tartozó címkét $\mathcal{G}(1) = 0$ -nak, a triviális egyensúlyi helyzet mindkét szimmetriával rendelkezik. Ezután legyen az i' -edik szimmetrikus megoldásokat tartalmazó egyensúlyi út címkéje pozitív, ha a megoldás szimmetriája tengelyes szimmetria, és negatív, ha középpontos szimmetria. Válasszuk meg $\mathcal{G}(i')$ nagyságát akkorára, ahány egyensúlyi ággal korábban volt az előző szimmetrikus megoldás. Mivel az Euler-feladat minden megoldása vagy tengelyesen, vagy középpontosan szimmetrikus, ezért a megoldások i sorszáma azonos a szimmetrikus megoldásokat tartalmazó egyensúlyi utak i' sorszámával. Szintén emiatt $|\mathcal{G}(i')| = 1$ minden $i' > 1$ esetén, tehát az aktuális és az előző szimmetrikus megoldás sorszáma mindig eggyel tér el. Ennek alapján megrajzolható a hisztogram, ezt a 2.1c ábra mutatja egy adott teherérték esetén. Észrevehető, hogy a kétféle szimmetrián alapuló címkézés már az Euler-feladat esetén sem adja egyértelmű leírását az egyensúlyi utaknak.

A klasszikus invariánsok alapján definiált hisztogramokat meg lehet határozni az 1.1 ábrán mutatott rugalmas rúdlánc esetére is. A rugalmas rúdlánc (1.1) és (1.2) egyenleteit megoldva egy adott teher esetén, majd minden megoldásnak megszámlálva a zérushelyeit, meghatározva a stabilitását és szimmetriáit, a 2.2 ábrán mutatotthoz hasonló hisztogramok rajzolhatók. Első pillantásra látható, hogy ezek lényegesen bonyolultabbak, mint az Euler-feladat esetén kapott hisztogramok.

A zérushelyek számán alapuló $\mathcal{Z}(i)$ címkék a rugalmas rúdlánc esetén nem alkotnak olyan monoton változó hisztogramot, mint az Euler-feladat esetén. Nem is adnak egyértelmű jellemzést, hiszen a zérushelyek száma legfeljebb $N - 2$ lehet, mivel csak a belső rúdelemek metszhetik az eredeti, vízszintes konfiguráció $y = 0$ egyenesét, a két szélső rúdelem nem. Vagyis nem sok remény van, hogy az ábrán mutatott esetben talált 15140 megoldást a 0,1,2,3 számokkal



2.1. ábra. A klasszikus invariánsokon alapuló hisztogramok az Euler-feladat esetén. Az egyensúlyi utakhoz tartozó megoldások a) zérushelyeinek $Z(i)$ száma, b) instabilitásának $E(i)$ rendje, és c) $G(i')$ szimmetriája. Az i jelöli a megoldás sorszámát, i' a szimmetrikus megoldások sorszámát, ami ennél a feladatnál megegyezik i -vel. A vizsgált teherparaméter értéke $\Lambda = 75\pi^2$ volt, ami megfelel az 1.2b ábrán mutatott legmagasabb teherértéknek, amikor kilenc megoldás adódott.



2.2. ábra. A klasszikus invariánsokon alapuló hisztogramok az $N = 5$ elemű rugalmas rúdlánc esetén. Az egyensúlyi utakhoz tartozó megoldások a) zérushelyeinek $Z(i)$ száma, b) instabilitásának $E(i)$ rendje, és c) a szimmetrikus megoldások $G(i')$ szimmetriája. A vizsgált teherparaméter értéke $\lambda = 20$ volt, és az $\alpha_0 \in [0, \pi]$ tartományba eső megoldásokat vizsgáltuk. Látható, hogy a szimmetrikus megoldások száma (230) nem azonos az összes megoldás számával (15140).

egyértelműen jellemezni tudjuk egy $N = 5$ elemű rugalmas rúdlánc esetén.

Hasonlóan, a potenciális energia Hesse-mátrixának negatív sajátértékein alapuló $E(i)$ címkézés sem lehet egyértelmű. Az $N = 5$ elemű rugalmas rúdlánc esetén a Hesse-mátrix 5×5 méretű, vagyis legfeljebb öt negatív sajátértéke lehet, ami kevés a 15140 megoldás egyértelmű címkézéséhez. A hisztogram ebben az esetben sem egy monoton függvény. Vegyük észre, hogy az Euler-feladattal ellentétben most nemcsak egy stabil megoldás van: a rugalmas rúdlánc esetén sok megoldásra teljesül $E(i) = 0$. Érdekes megfigyelni ezeknek az önhasznós elrendeződését a többi megoldás között a 2.2b ábrán.

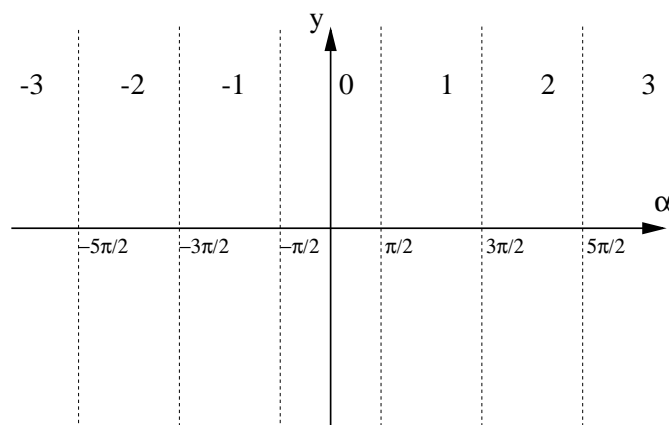
A harmadik invariánstól, a szimmetriától eleve nem is várhattunk sokat, az már az Euler-feladat esetén sem adott egyértelmű leírást. Ott azonban legalább minden megoldás szimmetrikus volt, amit a rugalmas rúdlánc esetében nem lehet elmondani. Most csak 230 megoldás volt szimmetrikus az ábrán mutatott esetben, a sok nem szimmetrikus megoldást mutatja, hogy

a $\mathcal{G}(i')$ hisztogramon nagy ugrások vannak, vagyis messze vannak egymástól a szimmetrikus megoldások.

Felmerül tehát az igény arra, hogy a megoldásokhoz találjunk egy olyan címkézést, ami egyrészt egyértelmű, tehát minden egyensúlyi úthoz kölcsönösen egyértelműen rendel egy címkét, másrészt amiből a megoldások klasszikus invariánsai is megkaphatók, tehát elegendő fizikai információt hordoz.

Az első feltételnek megfelelő címkézés már korábban is ismert volt, ahogy azt a Bevezetésben is említettük. A szimbolikus dinamikán alapuló címkézés egyértelmű leírását adja az egyensúlyi utaknak, és könnyen előállítható. Azt kívánjuk megmutatni, hogy ennek a címkézésnek a segítségével könnyen előállíthatók a klasszikus invariánsok is.

A Bevezetésben említettük, hogy a rugalmas rúdláncok alakja „kilapul” a λ teherparaméter növelésével, vagyis ahogy egy egyensúlyi úton haladunk „felfelé” a bifurkációs diagramon, $\lambda \rightarrow \infty$, azt tapasztaljuk, hogy $y_i \rightarrow 0$, $\alpha_i \rightarrow k_i\pi$. Arra is utaltunk a Bevezetésben, hogy ha a teher már elég nagy, akkor a rugalmas rúdlánc alakját meghatározó változók is közel vannak a lapos alakhoz: $y_i \approx 0$, $\alpha_i \approx k_i\pi$, vagyis a k_i számok leolvashatók a megoldás alakjáról. Most megmutatjuk, hogy ennek a címkézésnek mi köze van a dinamikai rendszerek elméletéből ismert szimbolikus dinamikához.



2.3. ábra. Az (α, y) fázistér partíciója és a címkék kiosztása.

A rugalmas rúdlánc egyetlen, i -edik elemének helyzetét egyértelműen leírja y_i és α_i értéke. A teljes rúdláncalakot megadhatjuk úgy is, hogy N egymást követő pontot kijelölünk az (α, y) változók alkotta *fázistérben*. Ekkor az (1.1) képlet ennek a fázistérnek a pontjain egy *leképezést* határoz meg: ezt a teret önmagára képezi. Ennek hatására a rugalmas rúdlánc i -edik elemének megfelelő pont az $(i + 1)$ -edik elemet leíró pontba jut. Az (α, y) fázistéren értelmezett (1.1) leképezés tehát egy *dinamikai rendszert* alkot. Defináljunk most egy *partíciót* az (α, y) fázistéren, ahogy azt a 2.3 ábra mutatja: vágjuk fel az (α, y) síkot y tengellyel párhuzamos, π széles sávokra! A sávokat, szintén a 2.3 ábrán mutatott módon, egy-egy egész számmal jelöljük. Ha most a rugalmas rúdlánc helyzetét az α_i és y_i mennyiségek helyett csak azokkal a k_i ($i = 1, \dots, N$) egész számokkal jellemezzük, amelyek azt jelzik, hogy melyik sávokba estek az egyes elemeknek megfelelő pontok, akkor pontosan azt a címkézést kapjuk, amiről már a

Bevezetésben is beszéltünk. Ez csak nagyon pontatlan információt hordoz a rugalmas rúdlánc alakjáról: semmit nem mond k_i értéke arról, hogy milyen y_i távolságra van egy-egy rúdelem az eredeti helyzetétől, és az α_i szögeket is csak π pontossággal adja meg. A partíció, a sávokra osztás a dinamikai rendszer szempontjából egy szimbolikus dinamikát definiál, vagyis azt lehet tekinteni, hogy az egyes pályák melyik sávból melyik sávba tudnak eljutni. Megjegyezzük, hogy a 2.3 ábrán mutatott partíció természetesen nem generáló partíció (Badii és Politi, 1997), de a címkézés szempontjából így is megfelelő. A végtelen nagy terhek tartományában, amikor a rúd lapos, akkor egyértelmű a címkézés, hiszen az y_i értékekről nem is kell információ, mindegyik zérus, az α_i értékekről pedig elegendő azt tudni, hogy melyik sávban vannak, hiszen $\alpha_i = k_i\pi$ miatt mindig a sáv közepén maradnak.

A következőkben meghatározzuk a klasszikus invariánsokat ennek a szimbolikus dinamikán alapuló címkézésnek a segítségével. Először is, vezessük be a *delta-címkéket* a következőképpen:

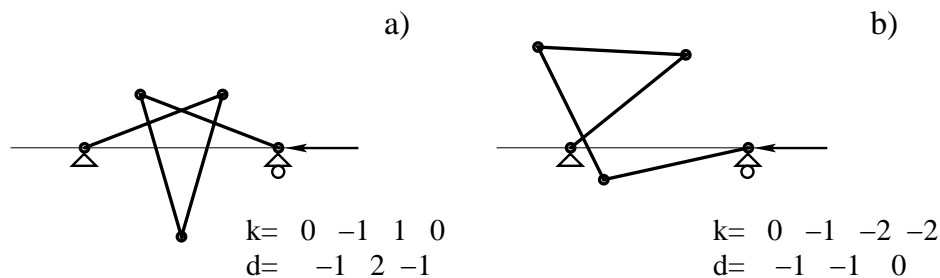
$$d_i = k_{i+1} - k_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.1)$$

Egy N elemű rugalmas rúdlánchoz N darab k_i egész számból álló címke, és $N-1$ darab d_i egész számból álló delta-címke tartozik.

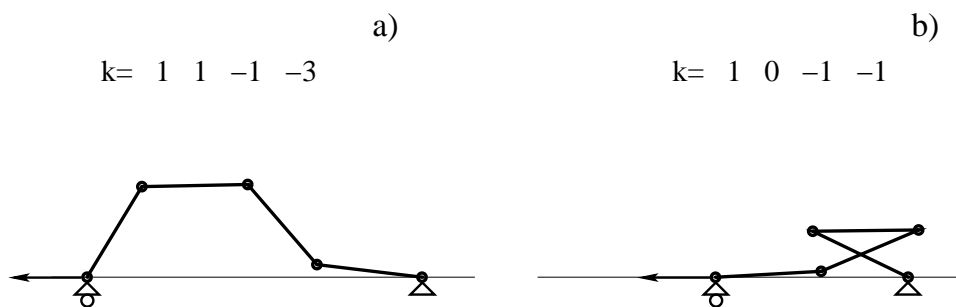
Ezek a delta-címkék egy durva közelítést adják az egyes csuklóknál lévő szögelfordulásoknak. Ha a rúdelemek mentén előrehaladva (i -t növelve) valamelyik megoldáshoz tartozó d_i delta-címke előjelet vált, akkor az $\alpha_{i+1} - \alpha_i$ relatív elfordulás is előjelet vált. Ez viszont azt jelenti, hogy a megfelelő csuklónál az elfordulással arányos nyomaték is előjelet vált, emiatt, az (1.1) képlettel összhangban, y_{i+1} is előjelet vált. Ez viszont azt jelenti, hogy a megelőző rúdelem metszette az $y = 0$ egyenest, azaz egy zérushelyet találtunk. Tehát a delta-címkében sorra tekintve a számokat, minden előjelváltáshoz a megoldásalaknak egy zérushelye tartozik. Ez az összefüggés egyértelmű mindaddig, amíg a delta-címkében nincs zérus elem. Még ekkor is általában meg lehet határozni a zérushelyek számát, ugyanis, ahogy azt a Bevezetésben említettük, a bifurkációs diagramon ismert az egyes egyensúlyi utakhoz tartozó címkék sorrendje, és a zérushelyek száma csak akkor változhat meg, ha a delta-címke utolsó eleme zérus. Ha tehát a delta-címkében nem az utolsó elem (d_{N-1}) zérus, hanem valamelyik másik elem, akkor a zérushelyek száma ugyanannyi, mint a szomszédos egyensúlyi úton a zérushelyek száma. Ez azt jelenti, hogy az esetek túlnyomó többségében a delta-címke segítségével egyértelműen megadható a zérushelyek $\mathcal{Z}(i)$ száma. A 2.4 ábrán két példát láthatunk: egy olyan esetet, amikor a zérushelyek száma könnyen eldönthető a delta-címkékből, és egy olyat, amikor az utolsó eleme a delta-címkének zérus.

A stabilitást jellemző $\mathcal{E}(i)$ értékek közvetlenül meghatározhatók a k_i szimbolikus dinamika segítségével. Ha valamelyik k_i szám páros, akkor a megfelelő rúdláncelem nyomott, ha k_i páratlan, akkor húzott állapotban van. A húzott rúdelemek stabil állapotnak felelnek meg, a nyomott elemek instabilnak. Vagyis a stabilitásra jellemző $\mathcal{E}(i)$ egyszerűen a nyomott rúdelemek számával, vagyis a szimbolikus dinamika páros elemeinek számával egyezik meg. Két példa a 2.5 ábrán látható.

Az egyensúlyi alak szimmetriája is a delta-címke segítségével kapható meg. Habár a címkék csak közelítő alakját adják meg a rugalmas rúdláncnak, a megoldás alakjának szimmetriáját örökli a delta-címke. Könnyen ellenőrizhető, hogy tengelyesen szimmetrikus rúdláncalakok



2.4. ábra. A delta-címke és a zérushelyek \mathcal{Z} számának kapcsolata. a) Egyértelmű eset, amikor a delta-címke kétszer vált előjelet, vagyis $\mathcal{Z} = 2$ zérushelye van a megoldásnak ($N = 4$, $\lambda = 10/(16\pi^2)$, $\alpha_0 \approx 0.3683$). b) Nem egyértelmű eset, a delta-címke utolsó eleme nulla, vagyis $\mathcal{Z} = 0$ vagy 1 zérushelye van a megoldásnak a delta-címke alapján ($N = 4$, $\lambda = 10/(16\pi^2)$, $\alpha_0 \approx 0.6789$).



2.5. ábra. A szimbolikus dinamikán alapuló címke és a stabilitást jellemző \mathcal{E} kapcsolata. a) Stabil konfiguráció, csak húzott rúdelemek vannak, $\mathcal{E} = 0$ ($N = 4$, $\lambda = 10/(16\pi^2)$, $\alpha_0 \approx 2.715$). b) Instabil konfiguráció, egy nyomott rúdelem van, $\mathcal{E} = 1$ ($N = 4$, $\lambda = 10/(16\pi^2)$, $\alpha_0 \approx 2.674$).

esetén

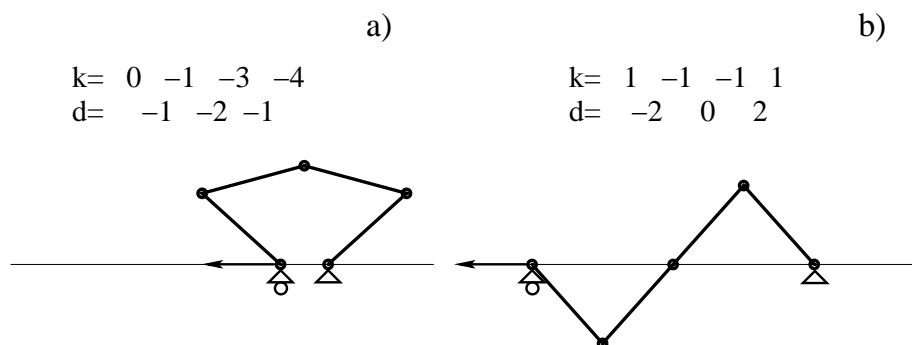
$$d_i = d_{N-i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.2)$$

teljesül, vagyis a delta-címke nem változik a sorrend megfordításának hatására, a delta-címke is „tengelyesen szimmetrikus” lesz. Hasonlóan, középpontosan szimmetrikus rúdláncok esetén teljesül, hogy

$$d_i = -d_{N-i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.3)$$

vagyis a delta-címke egy előjelváltást szenved a sorrend megfordításának („tükrözésének”) hatására. Ezeknek az állításoknak a fordítottja is igaz. Ha egy címke rendelkezik a (2.2) szimmetriával, akkor a rúdláncok tengelyesen szimmetrikus, ha a (2.3) teljesül, akkor a rúdláncok középpontosan szimmetrikus. Tegyük fel ugyanis az állítás ellenkezőjét, hogy vagy a (2.2)

vagy a (2.3) teljesül, de a rúdláncoknak nincs meg a megfelelő szimmetriája. Ekkor hajtjuk végre a megfelelő szimmetria műveletet a rúdláncokon; ezzel a feltevés szerint másik rúdláncokhoz jutunk. Viszont a címkéje a két alaknak meg kell, hogy egyezzen, hiszen a címke szimmetrikus volt, és mivel a címkézés egyértelmű, így a két rúdláncnak mégiscsak meg kell, hogy egyezzen. Illusztrációképpen a 2.6 ábra két szimmetrikus rúdláncot mutat a megfelelő címkékkel együtt.



2.6. ábra. A delta-címke és a rúdláncok szimmetriájának kapcsolata. a) Tengelyesen szimmetrikus konfiguráció ($N = 4$, $\lambda = 10/(16\pi^2)$, $\alpha_0 \approx 0.7363$). b) Középpontosan szimmetrikus konfiguráció ($N = 4$, $\lambda = 10/(16\pi^2)$, $\alpha_0 \approx 2.300$).

Sikerült tehát a három fontos klasszikus invariáns és a szimbolikus dinamikán alapuló címkézés között kapcsolatot teremteni. Ez alapján kimondható a dolgozat 1. tézise:

1. tétel. *Megmutattam, hogy a rugalmas rúdláncok egyensúlyi helyzeteit leíró, a szimbolikus dinamikával rokon címkézés segítségével egyértelműen meghatározhatóak a hagyományosan az egyensúlyi helyzetek osztályozására használt klasszikus invariánsok: az egyensúlyi helyzetek stabilitása, szimmetriája és zérushelyeinek száma. A szimbolikus dinamikán alapuló címkézés kiválthatja a klasszikus invariánsok alkalmazását. (Közös eredmény Kapsza Enikővel.)*

2.2. Térbeli káosz és periodikus pályák

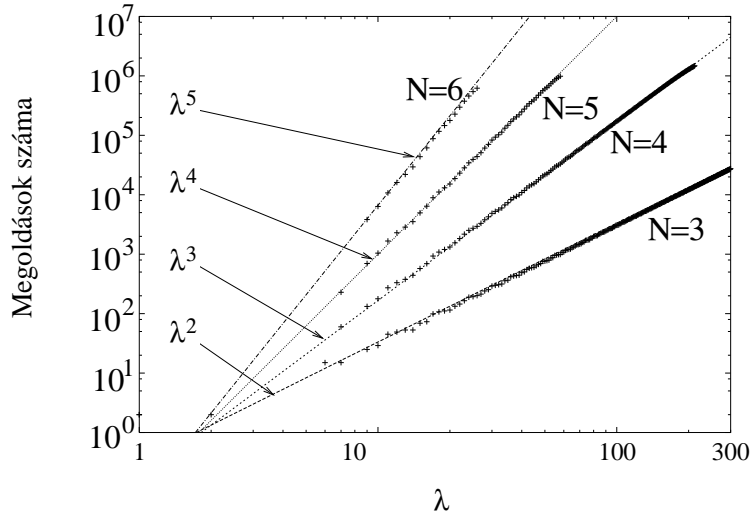
Az alfejezet Károlyi (2003) valamint Kocsis és Károlyi (2006) cikkei alapján készült.

Az 1.2a ábrán látható, hogy a λ teher növelésével a végein megtámasztott rugalmas rúdlánc egyensúlyi helyzeteinek száma gyorsan növekszik. Meg lehet mérni, hogy mennyire gyors ez a növekedés: a 2.7 ábrán azt látjuk, hogy különböző N elemszámú rugalmas rúdláncok esetén hogyan függ a tehertől a megoldások, vagyis az egyensúlyi helyzetek száma. Azt tapasztaljuk, hogy a megoldások S száma arányos λ^{N-1} mennyiséggel:

$$S(N, \lambda) \sim \lambda^{N-1}. \quad (2.4)$$

Vagyis, a megoldások száma *exponenciálisan nő* a rúdlánc hosszával. Összehasonlításképpen, az Euler-feladat esetén, ahogy az az 1.2b ábráról leolvasható, az egyensúlyi helyzetek száma

$S \approx \sqrt{\Lambda}/\pi$, és mivel $\Lambda = FL^2/EI$ volt (l. 1.2 ábra aláírása), ezért $S \sim L$ adódik. Vagyis, a bonyolult esetben az egyensúlyi helyzetek száma exponenciálisan növekszik a rugalmas rúdlánc hosszával, míg az egyszerűbb esetben a megoldások száma lineárisan, az exponenciálisnál lassabban növekszik a rúd hosszával. Ez azt az ötletet adja, hogy a peremérték-feladat bonyolultságát, *térbeli kaotikus* voltát esetleg lehetne jellemezni azzal, hogy a megoldások száma milyen gyorsan növekszik az értelmezési tartomány növelésével.



2.7. ábra. Az egyensúlyi helyzetek száma a λ teher és az N elemszám függvényében egy vége-in megtámasztott rugalmas rúdlánc esetében. A legjobban illeszkedő egyenesek meredekségei alapján a megoldások száma $S \sim \lambda^{N-1}$.

Ahhoz, hogy belássuk, hogy ez a viselkedés nemcsak ennek a legegyszerűbb esetnek a sajátja, vizsgáljunk meg egy általánosabb feladatot is, amelyet a 2.8 ábra mutat. Most is egy kezdetben (terheletlen állapotban) egyenes rugalmas rúdláncot vizsgálunk, de ennek egyik vége szabad, a másik vége pedig rögzítve van egy fix csuklóval és egy nyomaték bíróg rugóval. Tehát ez egy *konzolos rugalmas rúdlánc*, tekinthető egy konzol diszkrét modelljének. A rúdelemek hossza eltérő lehet, az i -edik elem hosszát ℓ_i jelöli. Vonatkoztatási rendszerünket a szabad véghez rögzítjük, az ábrán ezt „0” jelöli, ezt tekintjük a nulladik csuklónak. Az i -edik csukló helyzetét az éppen vizsgált egyensúlyi helyzetben (x_i, y_i) koordináták jelölik, $i = 0, 1, \dots, N$. Az $(i+1)$ -edik rúdelem vízszintessel bezárt szögét α_i jelöli, $i = 1, 2, \dots, N-1$. Ennek alapján a rúd egyensúlyi egyenletei a következő alakba írhatók:

$$\sin \alpha_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\ell_i}, \quad \cos \alpha_{i-1} = \frac{x_i - x_{i-1}}{\ell_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.5)$$

Feltételezzük, hogy a rúdelemeket összekötő rugók nem feltétlenül lineárisan rugalmasak, a rugókban ébredő nyomatékra csak annyit teszünk fel, hogy invertálható függvénye a két csatlakozó rúdelem relatív szögének: $M_i = M_i(\alpha_i - \alpha_{i-1})$, ahol $i = 1, 2, \dots, N$. Itt feltettük, hogy $\alpha_N = 0$ a fal elfordulása, és így a rögzített végnél található rugóban ébredő nyomatékot is úgy lehet kezelni, mint a belső csuklóknál levő rugók nyomatékát. A szerkezetre ható statikus teher

A (2.5) geometriai és a (2.6) egyensúlyi egyenletek, valamint a (2.7) peremfeltételek segítségével már elvileg számíthatók a konzolos rugalmas rúdlánc egyensúlyi helyzetei, de új változók bevezetésével eltüntethetők belőle a (2.6) egyenletben szereplő összegzéses („memó-

ria”) tagok. Legyenek az új változók a következők:

$$\begin{aligned} v_{i-1} &= \sum_{j=1}^i H_j, & w_{i-1} &= \sum_{j=1}^i H_j(y_i - y_j + d_j), \\ p_{i-1} &= \sum_{j=1}^i V_j, & q_{i-1} &= \sum_{j=1}^i V_j(x_i - x_j + c_j). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Itt v_i illetve p_i a vízszintes illetve függőleges erők összege az i -edik csuklóig, w_i illetve q_i pedig a vízszintes illetve függőleges erők nyomatékainak összege az i -edik csuklóig. Ezek segítségével a geometriai és egyensúlyi egyenletek a következő alakba írhatók:

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + \ell_i \sin \alpha_{i-1}, \\ M_i(\alpha_i - \alpha_{i-1}) + w_{i-1} + q_{i-1} &= 0, \\ v_i &= v_{i-1} + H_{i+1}(\alpha_i, y_i), \\ p_i &= p_{i-1} + V_{i+1}(\alpha_i, y_i), \\ w_i &= w_{i-1} + \ell_{i+1} v_{i-1} \sin \alpha_i + H_{i+1}(\alpha_i, y_i) d_{i+1}(\alpha_i, y_i), \\ q_i &= q_{i-1} + \ell_{i+1} p_{i-1} \cos \alpha_i + V_{i+1}(\alpha_i, y_i) c_{i+1}(\alpha_i, y_i), \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ha adottak a $H_i(\alpha_{i-1}, y_{i-1})$, $V_i(\alpha_{i-1}, y_{i-1})$ terhek és az $M_i(\alpha_i - \alpha_{i-1})$ nyomatékfüggvények (anyagegyenletek), akkor a megoldást lehet a Bevezetésben megadott módszerrel keresni. Azaz, vegyük fel, a (2.7) peremfeltételeknek megfelelően $y_0 = 0$ -t, majd kis lépésekben változtatgatva α_0 értékét, (2.8) segítségével számítsuk ki v_0 , w_0 , p_0 és q_0 értékét. Ezután (2.9) segítségével számítható az összes változó további értéke, végül α_N is. Ha α_0 értékét léptetve a végső α_N előjelet vált, akkor a két α_0 kezdőszög között biztosan van egy, ami egyensúlyi alaknak felel meg, és a két α_0 érték között finomítva a lépésközt tetszőleges pontossággal megkapható az az α_0 , amelyik $\alpha_N = 0$ -nak felel meg. Megjegyezzük, hogy α_i értéke egy implicit egyenletből számítható, (2.9) második egyenletéből, de ez mindig megtehető, hiszen feltettük, hogy M_i anyagtörvény invertálható. A többi egyenlet explicit.

Legegyszerűbb speciális esetként vizsgáljuk meg, hogy milyen az egyenletek alakja akkor, ha egy azonos ℓ hosszúságú rúdelemekből álló konzolos rugalmas rúdláncot csak egyetlen, adott F nagyságú, vízszintes erő terhel szabad végén. Tegyük fel még azt is, hogy az anyagtörvény lineáris: $M_i = \rho(\alpha_i - \alpha_{i-1})$, ahol ρ a torziós rugó merevsége. Az egyes rúdelemekre ható terhek: $H_1 = F$, $H_i = 0$ ($i = 2, 3, \dots, N$), $V_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Az egyetlen vízszintes erő helye: $d_1 = \ell \sin \alpha_0$. Mivel csak vízszintes erő van, ezért $p_i \equiv 0$ és $q_i \equiv 0$. Mivel csak egyetlen erő van, ezért $v_i \equiv F$. Így csak három egyenlet marad meg (2.9) egyenletekből, ezek dimenzióatlanított alakja:

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + \sin \alpha_{i-1}, \\ \alpha_i &= \alpha_{i-1} - w_{i-1}, \\ w_i &= w_{i-1} + \lambda \sin \alpha_i, \end{aligned} \quad (2.10)$$

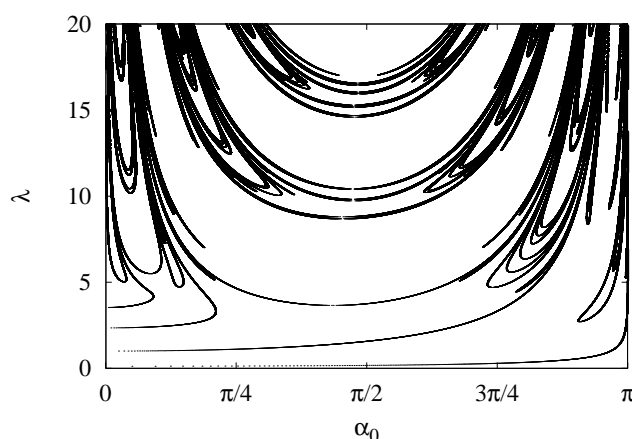
ahol $\lambda = F\ell/\rho$ a dimenzióatlan teher, és a változók dimenzióatlanított alakját az

$$y_i \rightarrow y_i \ell, \quad w_i \rightarrow w_i \rho. \quad (2.11)$$

transzformáció írja le, vagyis az y_i értékét ℓ , a w_i értékét ρ egységekben mérjük. A (2.7) peremfeltételek segítségével megkereshetők az egyensúlyi helyzetek: $y_0 = 0$ mellett tetszőleges α_0 és $w_0 = \lambda \sin \alpha_0$ esetén kiszámítható α_N , és kereshető, hogy ez milyen α_0 esetén lesz zérus. Tehát egy kezdetiérték-feladat megoldásai közül keressük ki azokat, amelyek teljesítik a rugalmas rúdlánc végén is a peremfeltételeket. A kezdetiérték-feladat egyenleteit (2.10) adja meg, a kezdőfeltételek pedig tetszőleges α_0 mellett

$$y_0 = 0, \quad w_0 = \lambda \sin \alpha_0. \quad (2.12)$$

A peremfeltételeket kielégítő α_0 értékeket ábrázolva minden λ teher esetére, fix N elemszám esetén megszerkeszthető a bifurkációs diagram. Egy példát $N = 4$ elem esetére a 2.9 ábra mutat. Látható, hogy a megoldások száma most is gyorsan növekszik a teher növelésével. Egy bonyolult alakú egyensúlyi utat pedig a 2.10 ábra mutat.

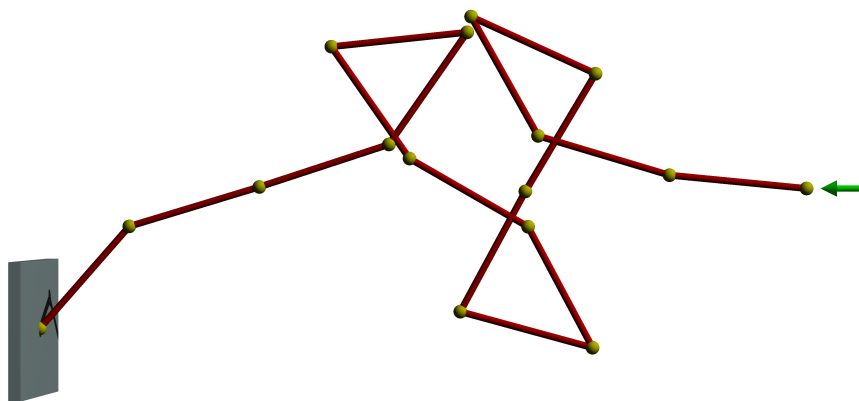


2.9. ábra. A végén terhelt, $N = 4$ elemű konzolos rugalmas rúdlánc bifurkációs diagramja az $\alpha_0 \in [0, \pi]$, $\lambda \in [0, 20]$ tartományban.

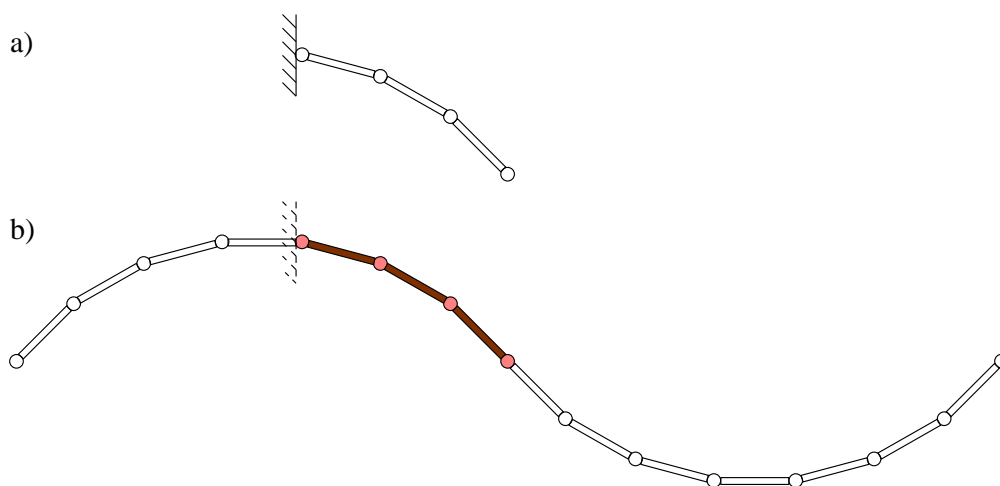
Tekintsünk most úgy a (2.9) egyenletekre, mint egy dinamikai rendszerre! Ismert (Newhouse és Pignataro, 1993; Tél és Gruiz, 2002), hogy dinamikai rendszerekben a periodikus pályák P száma exponenciálisan nő a periódusidő T hosszával: $P \sim e^{TK}$, ahol K a *topologikus entrópia*. Megmutatjuk, hogy peremérték-feladatunk megoldásai és a megfelelő kezdetiérték-feladat periodikus pályái között szoros kapcsolat van, és ez lehetőséget teremt a térbeli kaotikus viselkedés azonosítására. A periodikus pályák és az egyensúlyi helyzetek közötti kapcsolat az eredeti, 1.1 ábrán mutatott rugalmas rúdlánc esetén már korábban is ismert volt (Domokos és Holmes, 1993).

Akár a végén terhelt konzolos rugalmas rúdlánc (2.10) egyenleteit, akár az általános (2.9) egyenleteket tekintjük, könnyű megmutatni, hogy (2.7) következményeként teljesülnek az alábbi egyenlőségek, ha az i indexeket kiterjesztjük az $i = 1, 2, \dots, N$ tartományon túlra is:

$$y_i = -y_{-i}, \quad \alpha_i = \alpha_{-i-1}, \quad (2.13)$$



2.10. ábra. A végén terhelt, $N = 15$ elemű konzolos rugalmas rúdlánc egyik egyensúlyi alakja. A teherparaméter értéke $\lambda = 2$, a kezdőszög $\alpha_0 \approx -3.044365$.



2.11. ábra. A konzolos rugalmas rúdlánc alakjának kapcsolata a leképezés periodikus pályájával. a) Az $N = 3$ elemű konzolos rúdlánc egy egyensúlyi alakjának vázlata. b) a (2.13) és (2.14) képletekkel megadott kiterjesztése a rúdláncalaknak. Az eredeti alak színezéssel jelölve. Egy $4N + 2 = 14$ elemű láncot kaptunk.

$$y_{N-i} = y_{N+i+1}, \quad \alpha_{N-i} = -\alpha_{N+i}. \quad (2.14)$$

Fizikailag, a (2.13) egyenletek azt jelentik, hogy N elemből álló konzolos rugalmas rúdláncunk szabad végéhez odailleszthetünk még egy konzolos rúdláncot annak a szabad végével, hogy a két rúdlánc egymásnak a középpontos tükörképe legyen, és ekkor a két rúdlánc együtt is egyensúlyban lesz. A (2.14) egyenletek azt jelentik, hogy a rúd fal felőli végét elválasztva a faltól, beillesztve a fal helyett egy vízszintes rúdelemet, majd hozzákapcsolva az eredeti konzolos rugalmas rúdláncnak a tükörképét (a beillesztett elem középpontján átmenő függőleges tengelyre vonatkozóan), megint egy egyensúlyban levő szerkezetet kapunk. Folytatva ezeket az összecsatolásokat, kapunk egy $4N + 2$ elemből álló szerkezetet, amely egy periódusát adja a leképezésnek, ahogy azt a 2.11 ábra mutatja. Ilyen $4N + 2$ elemből álló szerkezetekből bármennyit egymás után kapcsolva egyensúlyi szerkezetet készíthetünk, ami tehát kielégíti a (2.9) egyenleteket. Másrészt viszont ez a rúdalak egyben a (2.9) egyenletek által megadott dinamikai rendszernek egy periodikus pályáját adja meg. Vagyis minden egyensúlyi rúdláncalak megfelel a dinamikai rendszer egy-egy periodikus pályájának, pontosabban annak egy részletének. Megfordítva ez persze nem teljesül, hiszen csak azokhoz a periodikus pályákhoz tartozik rúdláncalak, amelyeknek van $\alpha_i = 0$ eleme (az $\alpha_N = 0$ peremfeltétel miatt), és aminek van $y_i = 0$ eleme is (az $y_0 = 0$ peremfeltétel miatt).

Mivel a periodikus pályák száma exponenciálisan növekszik, ezért feltehető, hogy a rúdláncalakoknak megfelelő periodikus pályák száma is exponenciálisan növekszik. Várható tehát, hogy az egyensúlyi alakok száma egy N elemű lánc esetén, ahol a periódus hossza $T = 4N + 2$, tipikusan

$$S(N, \lambda) \sim e^{(4N+2)K}, \quad (2.15)$$

ahol K a topologikus entrópia. Vagyis, ha a dinamikai rendszerünk kaotikus, azaz $K > 0$, akkor a peremérték-feladat megoldásainak száma exponenciálisan függ a vizsgált tartomány hosszától, azaz az elemek számától, míg ha a statikai feladatnak megfelelő dinamikai rendszer nem kaotikus, $K \leq 0$, akkor a megoldások száma az exponenciálisnál gyengébben függ az elemek számától.

A csak a végén terhelt konzolos rugalmas rúdlánc esetében, a (2.10) és (2.7) egyenletekkel megadott peremérték-feladatot megoldva különböző N elemszámok esetében, ábrázolható a megoldások száma a λ teherparaméter függvényében. Ezt mutatja a 2.12 ábra, amelyről leolvasható, hogy a megoldások száma most is

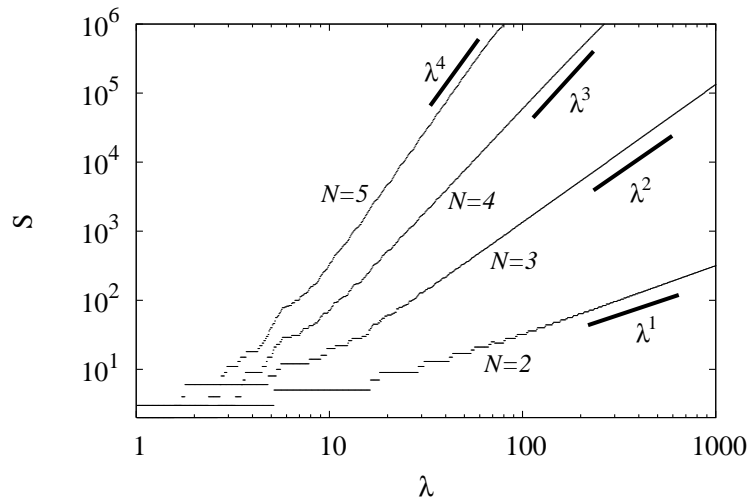
$$S(N, \lambda) \sim \lambda^{N-1}. \quad (2.16)$$

Vagyis ebben az esetben is, mint ahogy a két végén megtámasztott rugalmas rúdlánc esetén, a 2.7 ábra kapcsán említettük, az egyensúlyi alakok száma exponenciálisan függ a vizsgált tartomány hosszától. Összehasonlítva a megoldások számára kapott (2.15) és (2.16) képleteket, azt kapjuk, hogy a (2.10) egyenletekkel megadott dinamikai rendszer topologikus entrópiája

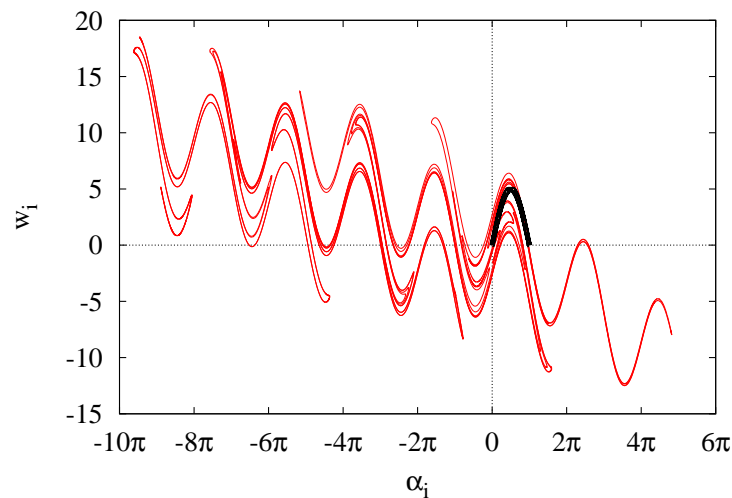
$$K \approx \frac{1}{4} \ln \lambda \quad (2.17)$$

kellően nagy N -ek és λ -k esetén.

Az egyensúlyi helyzetek számának exponenciális függése a tartomány hosszától megérthető a következőképpen is. Úgy kerestük a megoldások számát, hogy egy kezdetiérték-feladat



2.12. ábra. Az egyensúlyi helyzetek száma a λ teher és az N elemszám függvényében a végén terhelt konzolos rugalmas rúdlánc esetén. A legjobban illeszkedő egyenesek meredekségei alapján a megoldások száma $S \sim \lambda^{N-1}$.



2.13. ábra. Kezdőfeltételek halmazának szétterülése a (2.10) leképezés $N = 4$ iterációjának hatására $\lambda = 5$ esetén. Az $\alpha_0 \in [0, \pi]$, $w_0 = \lambda \sin \alpha_0$ (vastag fekete vonallal jelölt) halmazról 50000 kezdőfeltételt indítottunk, ezek képét $N = 4$ iteráció hatására a vékony vonal jelzi. Az $\alpha = 0$ vonalon levő pontok felelnek meg az $N = 4$ elemű konzolos rugalmas rúdlánc egyensúlyi helyzeteinek. A λ teherparaméter és az N elemszám növelésével az iteráció eredménye egyre hosszabb és kanyargósabb görbe lesz.

megoldásai közül válogattuk ki azokat, amelyek teljesítik a peremérték-feladat peremfeltételeit a rúd másik végén is. Ezt grafikusán is be lehet mutatni, ahogy azt a 2.13 ábra mutatja a végén terhelt konzolos rugalmas rúdlánc esetében. A vastag vonallal jelölt helyzetek felelnek meg a (2.12) kezdőfeltételeknek, a vékony, kanyargós vonal a kezdőfeltételek képe (2.10) leképezés $N = 4$ alkalmazása után. A kezdőfeltételek vonalát alkotó pontok közül azok felelnek meg egyensúlyi rúdláncalaknak, amelyeknek a képe rajta van az $\alpha = 0$ függőleges tengelyen, hiszen ezek teljesítik a rúdvégi peremfeltételt. Látható, hogy az iteráció eredményeként kapott vonal jelentősebb hosszabb, mint a kezdeti vastag vonal. Ismert, hogy dinamikai rendszerek *fázisterében* a kezdőfeltételek halmaza exponenciálisan „folyik szét”, azaz egy kis vonal darab hossza tipikusan exponenciálisan növekszik az idővel, vagyis a leképezések során (Newhouse és Pignataro, 1993; Tél és Gruiz, 2002). Ennek a növekedésnek az ütemét is a topológikus entrópia jellemzi: ez lesz az exponenciális hossznövekedés kitevőjében az idő (illetve a leképezések számának) együtthatója. Mivel a vonalnak nemcsak a hossza nő meg, hanem erősen össze is hajtogatja a kaotikus leképezések sorozata, várható, hogy a peremfeltételeknek megfelelő $\alpha = 0$ egyenessel való metszéspontjainak száma ugyanilyen ütemben nő, és emiatt a peremérték-feladat megoldásainak száma ezen gondolatmenet alapján is exponenciálisan nő a rúdelemek számával.

A fázistérbeli exponenciális szétterülés és a hajtogatás általános jellemzője a kaotikus rendszereknek, ezért más peremérték-feladatok esetén is várható, hogy a megoldások száma exponenciálisan függ a tartomány hosszától, ha a peremérték-feladat a térbeli káosz jelenségét mutatja. Ennek alapján megfogalmazható a 2. tétel:

2. tétel. *A dinamikai rendszerek elméletéből ismert topológikus entrópia segítségével egy lehetséges módszert adtam a térbeli káosz felismerésére. A módszer azon alapszik, hogy a vizsgált rendszert leíró peremérték-feladat megoldásainak száma exponenciálisan függ az értelmezési tartomány méretétől térbeli kaotikus rendszer esetén. (Közös eredmény doktoranduszommal, Kocsis Attilával.)*

2.3. Konzervatív térbeli káosz nemkonzervatív terhek esetén

Az alfejezet Kocsis és Károlyi (2005, 2006) cikkei alapján készült.

Eddig minden példa, amit vizsgáltunk, konzervatív terhek hatására történő kihajlással foglalkozott, tehát amikor a terhelő erő munkája útfüggetlen volt. Ennek hatására a peremérték-feladatnak megfelelő kezdetiérték-feladat, vagyis a dinamikai rendszer, is konzervatív volt. Például a (2.10) egyenletekkel leírt, végén terhelt konzolos rugalmas rúdlánc esetében a (2.10) egyenletek is konzervatív, *területtartó* leképezést írnak le. Területtartó egy leképezés, ha a változói által kifeszített fázistérben a kezdőfeltételek bármely halmaza által lefedett terület nem változik meg a leképezés hatására. Valójában a (2.10) egyenletek azonosak a *standard leképezéssel*, amelynek alakja (Lichtenberg és Liebermann, 1982):

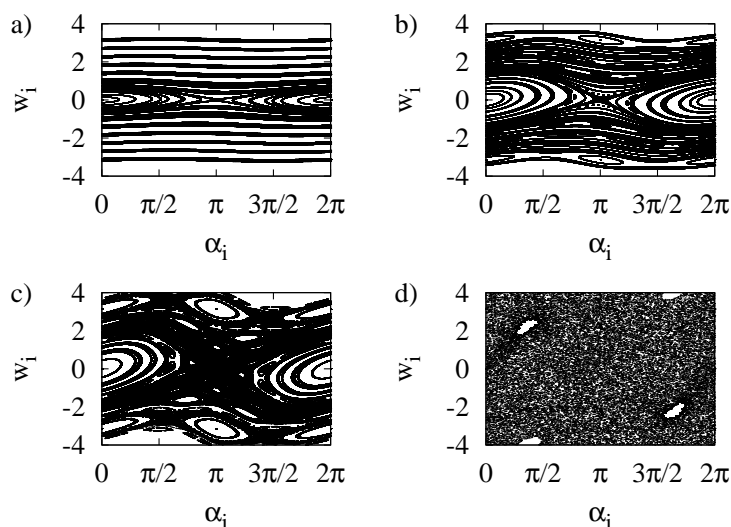
$$I_i = I_{i-1} + \lambda \sin \Theta_{i-1}, \quad \Theta_i = \Theta_{i-1} + I_i. \quad (2.18)$$

Valóban, bevezetve az

$$\alpha_i = \pi + \Theta_i - I_i, \quad w_i = -I_i \quad (2.19)$$

változócsere, a (2.10) és a (2.18) egyenletek azonosak, ha észrevesszük, hogy (2.10) első, y_i -re vonatkozó egyenlete lecsatolódik a másik kettőtől, csak követi azok változását, de nem befolyásolja őket, azaz (2.10) lényegében egy kétváltozós leképezés.

Hogy a standard leképezés területtartó, az ismert, és jól mutatja a 2.14 ábra is, ahol a (2.10) leképezés fázisportréját ábrázoltuk néhány λ érték esetére. Jól láthatók a területtartó, konzeratív rendszereket jellemző reguláris „szigetek” és az őket körbeölelő kaotikus „tengerek”.



2.14. ábra. A végén terhelte konzolos rugalmas rúdlánc, azaz (2.10) fázisportréja a) $\lambda = 0.1$, b) $\lambda = 0.5$, c) $\lambda = 1.0$ és d) $\lambda = 5.0$ esetén. Mindegyik esetben 15^2 kezdőpontot helyeztünk el egyenletesen elosztva az $\alpha_0 \in [0, 2\pi]$, $w_0 \in [-\pi, \pi]$ tartományban, majd ezeket iterálva 5000 lépésen keresztül, a képpontokat ábrázoltuk.

Felmerül a kérdés, hogy vajon mi történik nemkonzervatív terhek esetén, vajon akkor nem-konzervatív válik-e a statikus feladathoz rendelhető kezdetiérték-feladat is. Első példaként módosítsuk a két végén megtámasztott, 1.1 ábrán mutatott rugalmas rúdláncre vonatkozó feladatot. A módosítás annyi lesz, hogy a konstans vízszintes erő helyett egy konstans *követő erő* fog a görgős végen működni, amely mindig párhuzamos a legutolsó rúdelemmel. Ezzel a kihajlási feladat nemkonzervatív lett.

A követő erővel terhelte rugalmas rúdlánc egyenletei könnyen felírhatók. Csak azt kell észrevenni, hogy az erő függőleges komponensét azonnal felveszi a görgős támasz, az tehát terhet nem jelent a szerkezetre, míg az erő vízszintes komponense $F \cos \alpha_0$ lesz. Ha tehát az (1.1) egyenletbe λ helyett $\lambda \cos \alpha_0$ -t helyettesítünk, akkor megkapjuk a követő erő rugalmas rúdlánc egyenletét:

$$y_{i+1} = y_i + \sin \alpha_i, \quad \alpha_{i+1} = \alpha_i - y_{i+1} \lambda \cos \alpha_0, \quad (2.20)$$

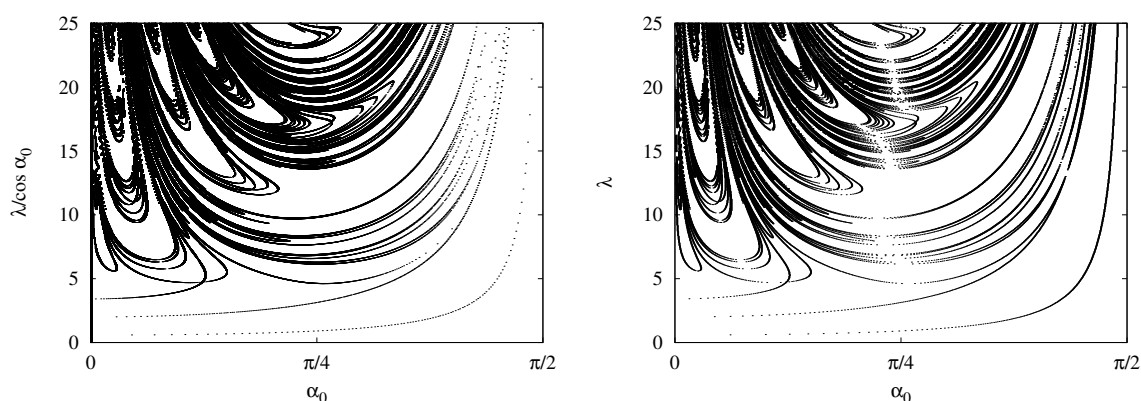
míg az (1.2) peremfeltételek változatlanok maradnak. Tekintsük a (2.20) egyenleteket dinamikai rendszernek, azaz kezdetiérték-feladatnak, és vizsgáljuk meg, hogy vajon területtartó-e! Ezt úgy tehetjük meg, hogy linearizáljuk a (2.20) egyenletet, vagyis kiszámítjuk a Jacobi mátrixát,

és ha ennek determinánsa egy, akkor a leképezés területtartó (Tél és Gruiz, 2002). A Jacobi mátrix alakja:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_{i+1}}{\partial y_i} & \frac{\partial y_{i+1}}{\partial \alpha_i} \\ \frac{\partial \alpha_{i+1}}{\partial y_i} & \frac{\partial \alpha_{i+1}}{\partial \alpha_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos \alpha_i \\ -\lambda \cos \alpha_0 & 1 - \lambda \cos \alpha_0 \cos \alpha_i \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

és ennek determinánsa $\det J = 1$. Tehát találtunk egy példát, ahol a kihajlási feladat nemkonzervatív, de a megfelelő dinamikai rendszer területtartó, konzervatív.

Könnyű látni, hogy a követő erővel terhelt rugalmas rúdlánc megoldásai szoros kapcsolatban vannak az eredeti, vízszintes erővel terhelt rugalmas rúdlánc megoldásaival. Ha találunk egy megoldást a követő erős rugalmas rúdlánc esetén, tehát egy ismert α_0 kezdőszögű egyensúlyi helyzetet valamilyen N elemszám és λ teher mellett, akkor *ugyanezen* α_0 -al jellemzett alak, tehát *ugyanaz* a rúdláncalak megoldása lesz az eredeti, vízszintes erővel terhelt rúdláncnak is, de más teherparaméter mellett: $\tilde{\lambda} = \lambda / \cos \alpha_0$ teher esetén. A bifurkációs diagramja a két feladatnak ennek alapján abban tér el, hogy a vízszintes erővel terhelt rugalmas rúdlánc (pl. 1.2a ábrán mutatott) bifurkációs diagramjának egyensúlyi útjait „el kell torzítani”, minden ág minden pontjának ordinátáját el kell osztani a hozzá tartozó abszcissza koszinuszával, azaz $\cos \alpha_0$ -al. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy a vízszintes erővel terhelt rugalmas rúdlánc bifurkációs diagramjának minden egyensúlyi útját az $\alpha_0 = \pi/2$ értéknél megfogjuk, és „felhúzzuk” végtelen magasra. Az így nyert bifurkációs diagramot egy $N = 4$ elemű rugalmas rúdlánc esetén a 2.15a ábra mutatja: tehát ez az $N = 4$ elemű, vízszintes erővel terhelt rugalmas rúdlánc bifurkációs diagramjának a torzított változata, minden pont függőleges koordinátáját elosztottuk $\cos \alpha_0$ -al. Összehasonlításként a 2.15b ábra mutatja a követő erővel terhelt rugalmas rúdlánc bifurkációs diagramját, amit úgy állítottunk elő, hogy $y_0 = 0$ mellett α_0 -t kis lépésekben változtatva megkerestük (2.20) alapján, hogy mikor vált előjelet y_N . A két ábra ugyanazokat az egyensúlyi utakat rajzolja ki, tehát a vízszintes erővel és a követő erővel terhelt rúdláncok igen hasonlóan viselkednek.



2.15. ábra. a) A vízszintes erővel terhelt $N = 4$ elemű rugalmas rúdlánc bifurkációs diagramjának az eltorzított változata: minden pont függőleges koordinátáját elosztottuk $\cos \alpha_0$ -al. b) Az $N = 4$ elemű, követő erővel terhelt rugalmas rúdlánc bifurkációs diagramja.

A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy vajon mennyire általános, hogy a konzervatív és nemkonzervatív terhek esetén is területtartó, konzervatív lesz a statikai feladatnak megfelelő dinamikai rendszer. Egy eléggé általános esetet már az előző, a 2.2 alfejezetben felírtunk a 2.8 ábra kapcsán: a (2.9) egyenleteket a (2.7) peremfeltételekkel. Számítsuk ki ennek az egyenletrendszernek, vagy leképezésnek is a Jacobi-mátrixát! Ez a következő alakba írható:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & m & m \\ H_y & H_\alpha + LH_y & 1 & 0 & mH_\alpha & mH_\alpha \\ V_y & V_\alpha + LV_y & 0 & 1 & mV_\alpha & mV_\alpha \\ D_y & D_\alpha + LD_y & M & 0 & 1 + mD_\alpha & mD_\alpha \\ C_y & C_\alpha + LC_y & 0 & N & mC_\alpha & 1 + mC_\alpha \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

ahol a következő jelöléseket vezettük be:

$$\begin{aligned} L &= \ell_i \cos \alpha_{i-1}, \quad M = \ell_{i+1} \sin \alpha_i, \quad N = \ell_{i+1} \cos \alpha_i, \quad m = -\frac{1}{M'_i(\alpha_i - \alpha_{i-1})}, \\ H_\alpha &= \frac{\partial H_{i+1}(\alpha_i, y_i)}{\partial \alpha_i}, \quad V_\alpha = \frac{\partial V_{i+1}(\alpha_i, y_i)}{\partial \alpha_i}, \quad H_y = \frac{\partial H_{i+1}(\alpha_i, y_i)}{\partial y_i}, \quad V_y = \frac{\partial V_{i+1}(\alpha_i, y_i)}{\partial y_i}, \\ D_y &= H_y d_{i+1}(\alpha_i, y_i) + H_{i+1}(\alpha_i, y_i) \frac{\partial d_{i+1}(\alpha_i, y_i)}{\partial y_i}, \\ C_y &= V_y c_{i+1}(\alpha_i, y_i) + V_{i+1}(\alpha_i, y_i) \frac{\partial c_{i+1}(\alpha_i, y_i)}{\partial y_i}, \\ D_\alpha &= H_\alpha d_{i+1}(\alpha_i, y_i) + H_{i+1}(\alpha_i, y_i) \frac{\partial d_{i+1}(\alpha_i, y_i)}{\partial \alpha_i} + \ell_{i+1} v_{i-1} \cos \alpha_i, \\ C_\alpha &= V_\alpha c_{i+1}(\alpha_i, y_i) + V_{i+1}(\alpha_i, y_i) \frac{\partial c_{i+1}(\alpha_i, y_i)}{\partial \alpha_i} - \ell_{i+1} p_{i-1} \sin \alpha_i. \end{aligned}$$

Ellenőrizhető, hogy a (2.22) Jacobi mátrixnak a determinánsa minden esetben $\det J = 1$, tehát a teher konzervatív vagy nemkonzervatív volta nem befolyásolja azt a tényt, hogy a megfelelő dinamikai rendszer területtartó, konzervatív.

Vizsgáljunk meg néhány speciális esetet! Ezekben lineárisan rugalmas rugókat feltételezünk, azaz $M_i = \rho(\alpha_i - \alpha_{i-1})$, ahol ρ a rugóállandó. Feltesszük azt is, hogy a rudak hossza azonos: $\ell_i \equiv \ell$.

Elsőként vizsgáljuk meg egy, a konzol szabad végére ható követő erő hatását! Ez lehet egy nagyon egyszerű diszkrét modellje egy csőnek, amelyből folyadék áramlik ki, a követő erő a kiáramló víz által kifejtett visszalökő erő modellje lehet (Bou-Rabee *et al.*, 2002). Megjegyezzük, hogy léteznek ennél pontosabb modellek is a folyadékot szállító cső modellezésére (Szabó, 1999, 2000, 2001, 2003). Az egyetlen nemkonzervatív követő erő miatt $H_i = 0$ és $V_i = 0$, kivéve $H_1 = F \cos \alpha_0$ és $V_1 = -F \sin \alpha_0$. Az erő a rugalmas rúdlánc szabad végén hat, ezért $d_1 = \ell \sin \alpha_0$, $c_1 = \ell \cos \alpha_0$. Ekkor a (2.9) általános egyenlet az alábbi dimenziótlan

alakot ölti:

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + \sin \alpha_{i-1}, \\ \alpha_i &= \alpha_{i-1} + z_{i-1}, \\ z_i &= z_{i-1} + \lambda \sin(\alpha_i - \alpha_0), \end{aligned} \quad (2.23)$$

ahol $\lambda = F\ell/\rho$ a dimenziótlan teherparaméter, $z_i = (w_i + q_i)/\rho$ egy új, dimenziótlan változó, az i -edik csuklóg a nyomatékokat összegzi, és y_i -t is dimenziótlanítottuk az $y_i \rightarrow y_i\ell$ változó-cserével. A terhek összegét jelölő v_i és p_i változók állandók, ezért nem is írtuk ki őket. Csakúgy, mint a korábban már vizsgált (2.10) esetben, y_i most is csak követi a másik két változót, azokat nem befolyásolja. Emiatt (2.23) két lényeges változót tartalmaz. A peremérték-feladathoz most is a (2.7) peremfeltételek tartoznak. Az $y_0 = 0$ az egyik peremfeltétel; z_i definíciója és (2.8) miatt pedig $z_0 = 0$. Emiatt (2.23) alapján $\alpha_i \equiv \alpha_0$, és $y_i = i \sin \alpha_0$. Mivel azonban a peremfeltételek alapján $\alpha_N = 0$, ezért $\alpha_i \equiv 0$ és $y_i \equiv 0$ lehet az egyetlen egyensúlyi helyzet. Tehát a követő erővel terhelt konzolos rugalmas rúdlánc csak az eredeti, egyenes helyzetben lehet egyensúlyban. Ez persze nem jelenti azt, hogy ez az állapot mindig stabil, a stabilitás elvesztése után a helyét *stabil mozgásnak* adja át, csakúgy, mint a követő erővel terhelt folytonos rúd esetében (Beck, 1952).

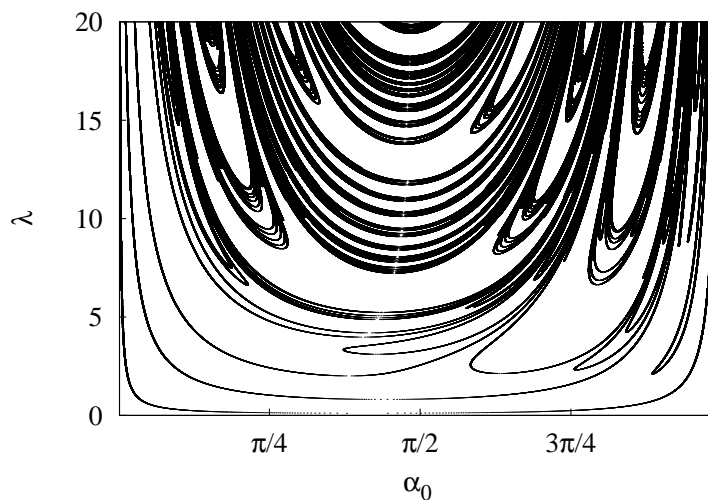
Egy másik nemkonzervatív terhet kapunk, ha minden egyes rúdelemet vízszintes, p intenzitású megoszló erő terhel. Az egyes rúdelemekre eső teher ekkor $H_i = p|\sin \alpha_{i-1}|\ell$, $V_i = 0$. Az erő mindig a rúdelem közepén hat, tehát $d_i = (1/2)\ell \sin \alpha_{i-1}$. Az eredő erőben szereplő $|\cdot|$ abszolút érték biztosítja, hogy a teher mindig bal kéz felé, vagyis a fal felé hat. Ezek alapján a (2.9) a következő, dimenziótlan alakba írható:

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + \sin \alpha_{i-1}, \\ \alpha_i &= \alpha_{i-1} - w_{i-1}, \\ v_i &= v_{i-1} + \lambda |\sin \alpha_i|, \\ w_i &= w_{i-1} + v_{i-1} \sin \alpha_i + \frac{1}{2} \lambda \sin \alpha_i |\sin \alpha_i|, \end{aligned} \quad (2.24)$$

ahol $\lambda = p\ell^2/\rho$ a dimenziótlan teherparaméter, a változókat pedig dimenziótlanítottuk a következő változócsereekkel:

$$y_i \rightarrow y_i\ell, \quad w_i \rightarrow w_i\rho, \quad v_i \rightarrow v_i\rho/\ell. \quad (2.25)$$

Mivel csak vízszintes erőink vannak, ezért a függőleges erőknek és a belőlük számítható nyomatékoknak megfelelő p_i és q_i változók azonosan nullák, így nem írtuk ki őket. Mivel a teher most sem függ az y_i értékétől, ezért a (2.24) egyenletekben az y_i -re vonatkozó most is lecsatolódik a többitől, azaz három lényeges változónk marad. A megoldás során felhasználjuk, hogy $y_0 = 0$, majd olyan α_0 -t keresünk, amelyek a (2.8) alapján kapott $v_0 = \lambda |\sin \alpha_0|$, $w_0 = (\lambda/2) |\sin \alpha_0| \sin \alpha_0$ mellett teljesítik az $\alpha_N = 0$ peremfeltételt. Példaként egy $N = 4$ elemű rugalmas rúdlánc bifurkációs diagramját mutatjuk a 2.16 ábrán. Most is látható, hogy az egyensúlyi utak száma nagyon magas, a szerkezet a térbeli káosz állapotában van.



2.16. ábra. Megoszló erővel terhelt, $N = 4$ elemű konzolos rugalmas rúdlánc bifurkációs diagramja az $\alpha_0 \in [0, \pi]$, $\lambda \in [0, 20]$ tartományban.

Összefoglalásképpen, kimondhatjuk a dolgozat 3. tézisét:

3. tézis. *Megmutattam, hogy nemcsak a konzervatív erőkkel terhelt rugalmas rúdláncok esetében lehetséges térbeli káosz, hanem olyan rugalmas rúdláncok esetében is, amelyekre nem-konzervatív terhek hatnak. A szerkezet egyensúlyi egyenleteinek megfeleltethető kezdetiérték-feladat minden esetben területtartó, konzervatív; és kaotikus volta okozza a szerkezet térbeli kaotikus állapotát. (Közös eredmény doktoranduszommal, Kocsis Attilával.)*

3. fejezet

Nyitott áramlások, fraktálok, aktív folyamatok

Ebben a fejezetben a nyitott áramlásban kaotikusan sodródó, kémiaailag vagy biológiailag aktív részecskék tulajdonságait vizsgáljuk. Először az aktivitás nélküli, passzívan sodródó részecskék mechanikájával foglalkozunk, és a 3.1 alfejezetben kimutatjuk, hogy egy szálas fraktálon gyűlnek össze a sodródó részecskék. Ezt követően a 3.2 alfejezetben a legegyszerűbb esetre vonatkozóan megmutatjuk, hogy a kaotikus sodródás mechanikai tulajdonságai, a szálas fraktálok jelenléte milyen módon változtatja meg a reakcióegyenletet. Végül megmutatjuk a 3.3 alfejezetben, hogy az eredményeket hogyan lehet alkalmazni egy régóta megválaszolatlan biológiai probléma megoldására, az úgynevezett „plankton-paradoxon” feloldására. Habár az első alfejezet is saját eredményeket tartalmaz, azokat nem fogjuk tézis formában is megfogalmazni, mert mások már korábban is kimutatták ezeket a jelenségeket, csak más áramlások kapcsán. A második és harmadik alfejezetben egy-egy tézist fogalmazunk meg a bemutatott eredmények alapján.

3.1. Passzív sodródás nyitott áramlásokban

Az alfejezet Károlyi (1996); Károlyi és Tél (1997); Károlyi *et al.* (1997); Toroczkai *et al.* (1997) által bemutatott eredményeken alapul.

A nyitott áramlásokban zajló kaotikus sodródás jellemzőit a Bevezetésben már ismertetett kétnyelős kád modelljén keresztül mutatjuk be. Ebben a modellben egy kétdimenziós áramlást vizsgálunk, amelyben a folyadék mozgását két, felváltva működő nyelő örvény irányítja. Az egyik nyelő örvény az (x, y) síkon az $x = a, y = 0$ helyen működik minden T időtartam első felében $T/2$ ideig, a másik nyelő örvény a T időperiódusok második felében működik $T/2$ ideig az $x = -a, y = 0$ helyen. Egy nyelő örvény hatására a folyadék sebességének minden pontban lesz egy, a nyelő felé mutató v_r komponense, és egy erre merőleges v_ϕ komponense. Ezek nagyságát a nyelő $2\pi C$ erőssége (egységnyi idő alatt eltávozó folyadékmennyiség) és az örvény $2\pi K$ erőssége (örvényesség) határozzák meg:

$$v_r = -\frac{C}{r}, \quad v_\phi = \frac{K}{r}, \quad (3.1)$$

ahol r a nyelő örvénytől mért távolság. Egy passzívan, tehát tehetetlenség nélkül sodródó, igen kicsinynek tekintett részecske mozgását ekkor az (1.3) egyenlet határozza meg, ahol a $v(r(t), t)$ sebességtér időfüggését az határozza meg, hogy minden fél periódus végén a sebességtér hirtelen, ugrásszerűen megváltozik a nyelő örvény helyének megváltozása miatt. Mialatt egy adott lefolyó működik, a passzívan sodródó részecske mozgását ez az egy nyelő örvény határozza meg. Ha a részecske a lefolyóhoz rögzített polárkoordináta-rendszerben az (r_0, ϕ_0) helyről indul a lefolyó kinyitásakor, akkor (1.3) és (3.1) alapján t idő alatt az

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 - 2Ct}, \quad \phi(t) = \phi_0 - \frac{K}{C} \ln \frac{r(t)}{r_0} \quad (3.2)$$

helyre jut el. Mivel közben az áramlás időfüggetlen, a részecske az éppen aktuális áramvonalakat követi. Vegyük észre, hogy ez a mozgás csak addig követhető, amíg

$$t \leq \frac{r_0^2}{2C}, \quad (3.3)$$

ezután a részecske eléri a lefolyót, és távozik a rendszerből. Emiatt az áramlás *nyitott*.

Megmutatható, hogy a sodródást két dimenziótlan paraméter határozza meg. Az egyik (ξ) az örvény és a nyelő erősségének aránya, a másik (η) a nyelő dimenziótlanított erőssége:

$$\xi = \frac{K}{C}, \quad \eta = \frac{CT}{a^2}. \quad (3.4)$$

Ha a helyzet jellemzésére is bevezetjük az $r \rightarrow ar$ új, dimenziótlan változót, amivel a lefolyók helyzete $x = \pm 1, y = 0$ lesz, és az időt a $t \rightarrow tT$ cserével dimenziótlanná tesszük, tehát az időperiódus egy lesz, akkor a (3.2) átírható az alábbi, dimenziótlan alakba:

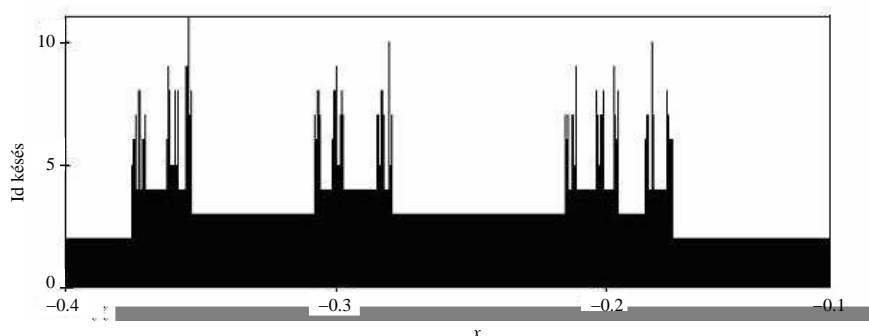
$$r(t) = \sqrt{r_0^2 - 2\eta t}, \quad \phi(t) = \phi_0 - \xi \ln \frac{r(t)}{r_0}. \quad (3.5)$$

Amíg ez a lefolyó működik, addig a részecske (3.5) második egyenlete alapján egy logaritmikus spirálon mozog, aminek polárkoordinátás alakja $r(\phi) = r_0 e^{(\phi_0 - \phi)/\xi}$.

Minden fél periódus elérésekor el kell végezni egy koordinátatranszformációt, amivel a lefolyóhoz illesztett polárkoordináta-rendszert át kell helyezni az éppen működésbe lépő lefolyóhoz, és újra kell kezdeni a t idő mérését. Ezt elvégezve, (3.5) egyenletből ki lehet számítani egy passzívan sodródó részecske mozgását, amíg végül valamelyik nyelőn keresztül el nem távozik, ennek feltétele, hogy az aktuálisan működésbe lépő nyelőhöz a részecske közelebb legyen, mint $\sqrt{\eta}$ a lefolyó indulásakor.

Ha csak egyetlen nyelő működne, akkor minden, az áramlásban sodródó részecske véges idő alatt eltávozna a lefolyón keresztül egy logaritmikus spirál mentén. Két, felváltva működő lefolyó esetén azonban minden váltáskor új spirált kezd el követni a részecske, és ez lényegesen bonyolultabb viselkedést eredményez. Nézzük meg először, hogy a sodródó részecskék mennyi ideig tartózkodnak a megfigyelési tartományban! Egy vonalról részecskéket indítva, és megmérve, mennyi idő alatt „szöknek ki” valamelyik lefolyón át, a mért időkézés nagyon bonyolult módon függ a kezdőhelyzettől (l. a 3.1 ábrán). Az ábra megrajzolásakor alkalmazott véges felbontáson is látszik, hogy meglehetősen sok nagyon magas csúcs bukkan fel, ami

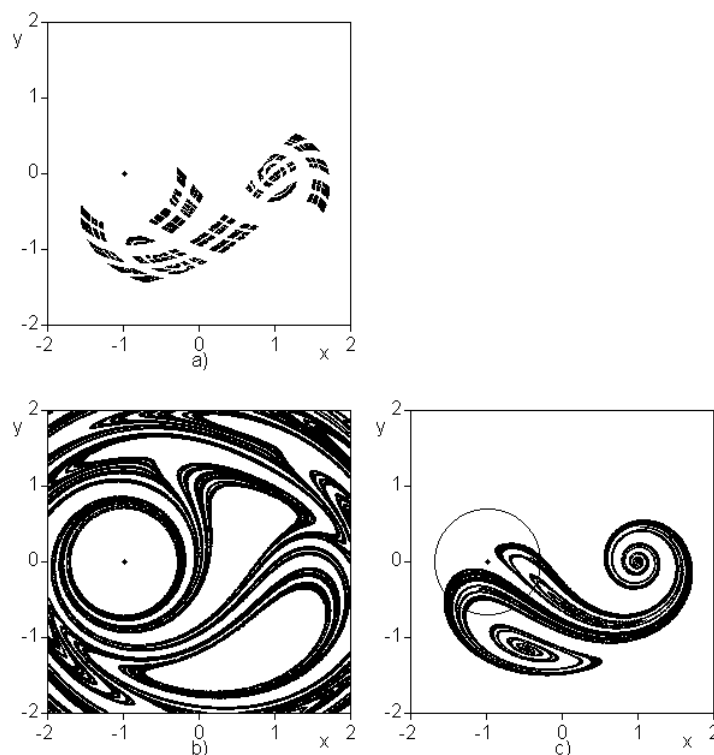
anomáliásan hosszú bent tartózkodási időt jelez: míg a részecskék jó része viszonylag gyorsan kijut valamelyik lefolyón keresztül, bizonyos részecskék hosszú időre csapdába esnek. Az ábránál jobb felbontást alkalmazva még több ilyen magas csúcs bukkan fel, és azok magassága is nő. Valójában *végtelen sok* olyan csúcs van, amelynek *végtelen a magassága*. Ennek ellenére ezek a végtelen hosszú időre csapdába ejtett részecskék kivételesek, *majdnem minden* részecske elhagyja a tartályt véges idő alatt, a végtelen magas csúcsok így egy *nullmértékű* halmazt alkotnak. A 3.2b ábrán a síknak azokat a pontjait ábrázoltuk, amelyek hosszú idő alatt sem hagyják el a megfigyelési tartományt: ezek közelítőleg (az alkalmazott felbontás esetén) megegyeznek a soha el nem távozó részecskék kezdőhelyzeteivel. Ezek egy bonyolult *fraktál-halmazt* alkotnak, amelynek a dimenziója nem egész szám. Ez egy szálas, fonalas szerkezetű fraktál: egyik irányban sima vonalakat, görbéket alkot, a másik irányban a Cantor-halmazhoz hasonló szerkezetet mutat, vagyis a Bevezetésben az 1.6 ábrán mutatott Cantor-szálakhoz hasonló a szerkezete. Az alakzat D fraktáldimenziója kétdimenziós áramlásban egy és kettő közé esik: $1 < D < 2$.



3.1. ábra. Sodródó részecskék időkéseése a kétfolyós kádban. Az alkalmazott paraméterek értéke $\xi = 10$, $\eta = 0.5$ volt. Az ábra elkészítéséhez 10^4 részecskét indítottunk az $(x, y) = (-0.4, 1)$ és $(x, y) = (-0.1, 1)$ pontok közti szakaszcól, és kezdőhelyzetük függvényében ábrázoltuk, hogy hány periódus alatt érik el valamelyik lefolyót. Érdekes megfigyelni a magas csúcsok különös eloszlását.

Felmerül a kérdés, hogy mi történik a soha ki nem jutó részecskékkal. Ha követjük ezek pályáját, akkor azt tapasztaljuk, hogy ezek hamarosan a 3.2a ábrán látható halmazon gyűlnek össze. Ez egy újabb fraktálhalmaz, amelyet *kaotikus halmaznak* neveznek, ez „ejti csapdába” azokat a részecskéket, amelyek sohasem érik el egyik lefolyót sem. Ebbe a halmazba tartoznak többek között az időben periodikus részecskepályák, ezen nyilvánvalóan nem tudják elhagyni a megfigyelési tartományt. Ide tartozik azonban egy megszámlálhatatlanul végtelen sok nem-periodikus pályából álló halmaz is. Ezek együtt ejtik csapdába a 3.2b ábra pályáit, azok idővel a kaotikus halmazhoz tartanak. Emiatt a 3.2b ábrán jelölt pontokból induló pályákat a kaotikus halmaz *stabil sokaságának* nevezzük: a stabil sokaság azon pályák halmaza, amelyek tetszőlegesen hosszú idő alatt a kaotikus halmazhoz tartanak.

Azonban a kaotikus halmaz nem stabil, *nem az összes* részecskét vonzza magához, csak azokat a kivételes részecskéket, amelyek a stabil sokaságról indulnak. A többieket eltaszítja magától az *instabil sokasága* mentén, ezt az instabil sokaságot mutatja a 3.2c ábra. Az instabil

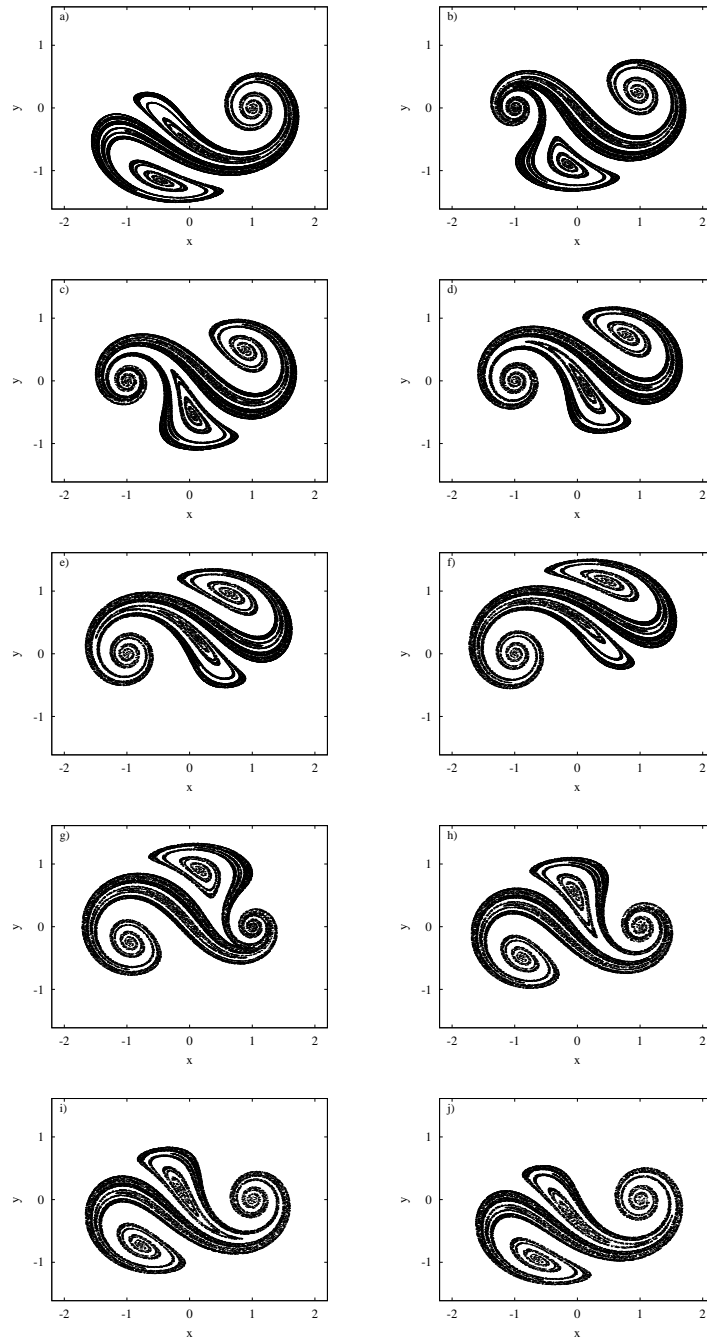


3.2. ábra. a) A kaotikus halmazról készült pillanatfelvétel a kétfolyós kádban. Az alkalmazott paraméterek értéke $\xi = 10$, $\eta = 0.5$ volt. Fekete pontok jelzik azokat a részecskéket, amelyek soha ki nem jutó csapdapályákon mozognak. b) Pillanatfelvétel a kaotikus halmaz stabil sokaságáról. A fekete pontokról induló részecskék a kaotikus sokasághoz tartanak. A stabil sokaság vonalai alkotják az egyes lefolyók vonzási tartományának határát. c) Pillanatfelvétel a kaotikus halmaz instabil sokaságáról. Ezt rajzolja ki a kezdőfeltételek egy sokasága. A kör jelzi azt a területet, ami a következő fél periódus alatt távozik a bal oldali lefolyón keresztül.

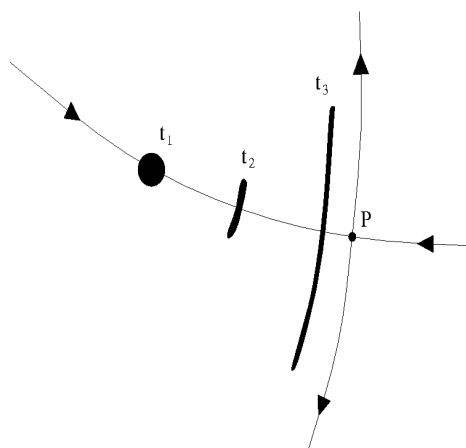
sokaság is egy szálas fraktál, hasonló a Cantor-szálakhoz, a fraktáldimenziója egy és kettő közé esik: $1 < D < 2$. Mivel a kaotikus halmaznak van stabil és instabil sokasága is, szokás a kaotikus halmazt a *kaotikus nyereg* névvel is illetni. A kaotikus halmazon tartózkodó részecskék korlátlan ideig kaotikus módon viselkednek. A többi részecske legfeljebb véges ideig viselkedik bonyolult módon, a viselkedésük a tranziens káosz elméletének tárgykörébe tartozik.

Természetesen a kaotikus halmaz és annak stabil, instabil sokaságai időben változnak, mégpedig az áramlás periódusidejének megfelelően. Példaképpen a 3.3 ábra mutatja az instabil sokaság időfüggését. Habár az ábra maga időben periodikus, ez nem jelenti, hogy az egyes pontoknak megfelelő részecskék is visszakerülnek az eredeti helyükre. Annál is inkább, hiszen pont az instabil sokaság esetén a részecskék egy része eltávozik valamelyik nyelőn keresztül. Habár a kaotikus halmaz és sokaságainak a képe időben (periodikusan) változik, az alakzatok fraktáldimenziója *időfüggetlen*. Vagyis, nyitott áramlásokban a kaotikus viselkedés *tranziens*, de a szálas fraktálok jelenléte *permanens*.

A kaotikus halmaz stabil és az instabil sokaságának világos fizikai jelentése van. A stabil



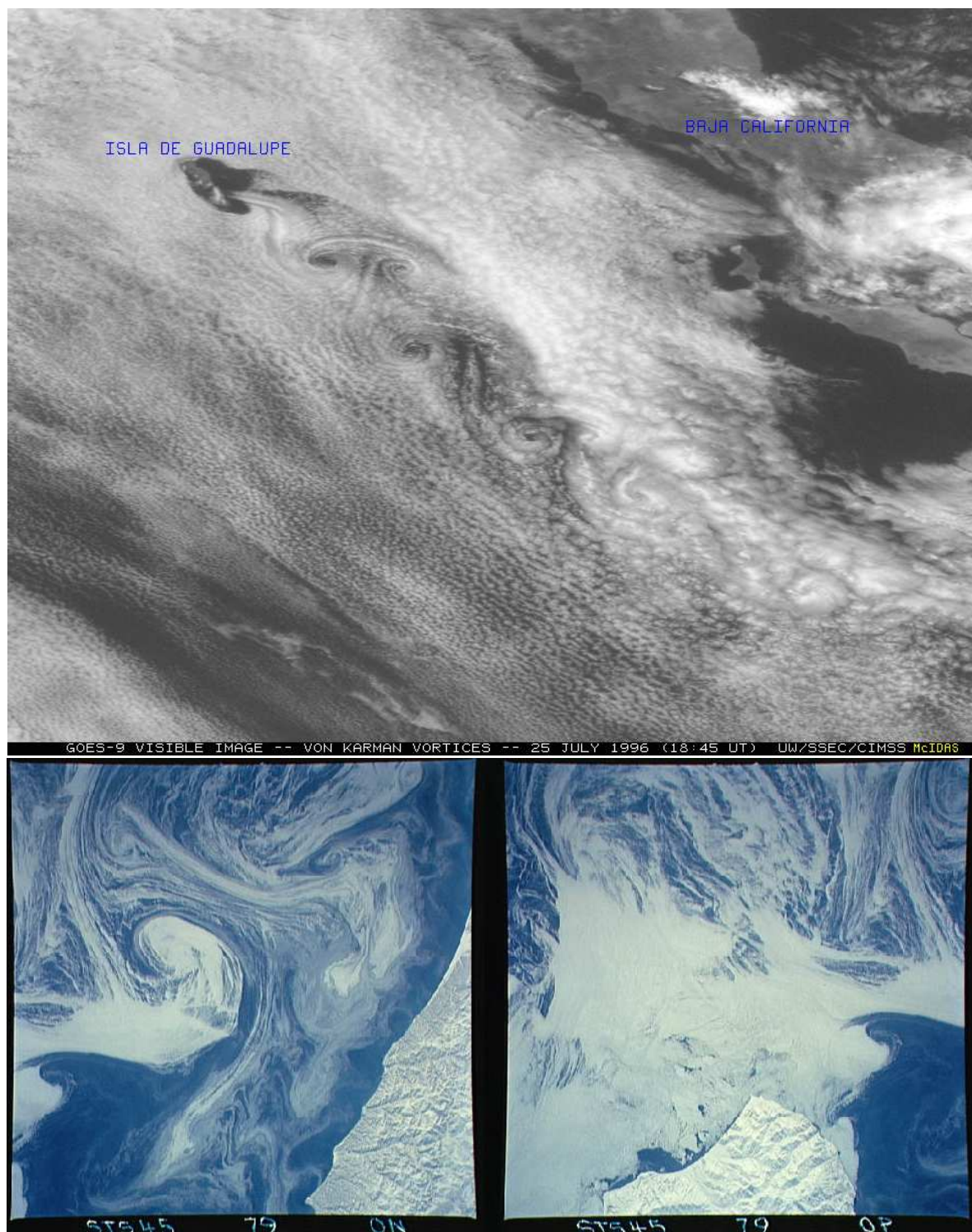
3.3. ábra. Az instabil sokaság időbeli változása a kétfolyós kádban $\xi = 10$, $\eta = 0.5$ esetén. Az egyes ábrák a kaotikus sokaság instabil sokaságát mutatják a) $t = 0$, b) $t = 1/10$, c) $t = 2/10$, d) $t = 3/10$, e) $t = 4/10$, f) $t = 5/10$, g) $t = 6/10$, h) $t = 7/10$, i) $t = 8/10$ és j) $t = 9/10$ dimenziótlan idővel a bal oldali lefolyó kinyitása után. Az instabil sokaság képe $t = 10/10$ idő után ugyanaz lesz, mint az a) ábrán: az instabil sokaság képe időben periodikus, habár az egyes pontok általában nem térnek vissza ugyanabba helyzetbe.



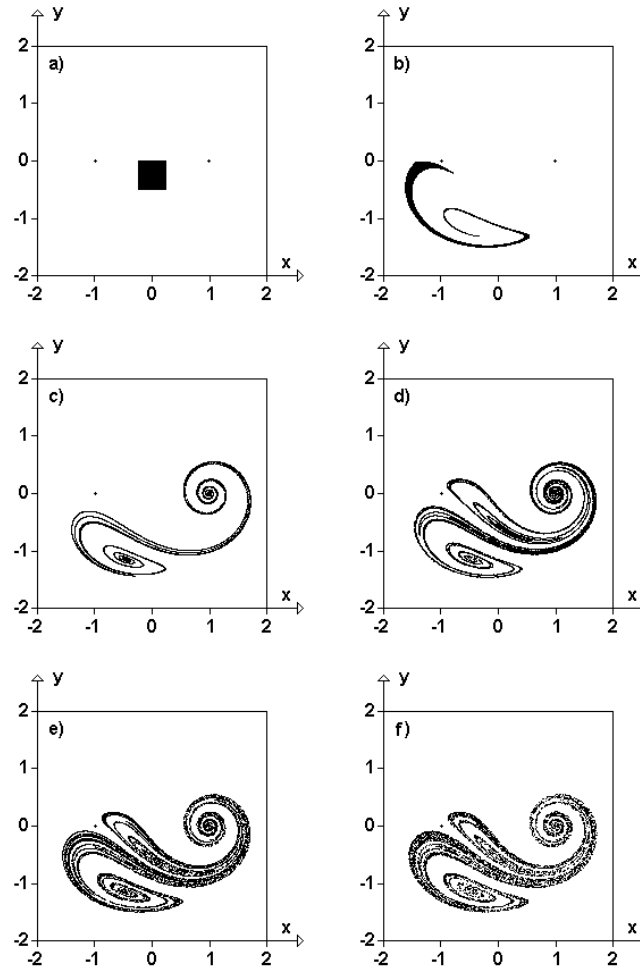
3.4. ábra. A stabil sokasággal kezdetben átfedő festékcsepp a kaotikus halmaz instabil sokaságához tart. Azok a részecskék, amelyek kezdetben pontosan a stabil sokaságon vannak, a kaotikus halmazhoz tartanak (P pont jelképezi vázlatosan). A többi részecske elhagyja a kaotikus halmazt az instabil sokaság mentén, miközben szemmel is láthatóan kirajzolja azt.

sokaság alkotja a határt az egyes lefolyók vonzási tartományai között. Ha választunk két olyan pontot, ahonnan a részecskék különböző lefolyókon keresztül távoznak, akkor kell legyen e két pont között legalább egy olyan kezdőhelyzet, ahonnan a részecske nem tudja „eldönteni”, hogy melyik lefolyón keresztül távozzon, így végtelen sokáig bent marad: ez a közbenső kezdőpont rajta van a stabil sokaságon. Még érdekesebb az instabil sokaság jelentése, mert az szabad szemmel is látható, ha részecskék egy sokaságát (pl. festékcseppet) indítunk az áramlásban. Ha a festékcsepp kezdetben átfed a stabil sokasággal, akkor hamarosan kirajzolja a kaotikus halmaz instabil sokaságát. Ahogy azt a 3.4 ábra vázlatosan mutatja, a kezdetben a stabil sokaságon induló pontok a kaotikus halmazt jelképező nyeregponthoz tartanak, az összes többi pont az instabil sokaság mentén távolodik el tőle. Vagyis amit az áramlásokban tipikusan szabad szemmel láthatunk, az nem az áramlási kép (áramvonalak), hanem az instabil sokaság; néhány példát a 3.5 ábra mutat, l. még Van Dyke (1998) albumát a folyadékok mozgásáról. A kétnyelős kád esetében egy festékcsepp instabil sokasághoz tartását a 3.6 ábra szemlélteti.

Mivel a festékcsepp az instabil sokaságra húzódik, szükségszerűen a festékcsepp *határvonala* is az instabil sokasághoz, ehhez a fonalas fraktálhoz tart. Ha különféle részecskékből álló (pl. különböző színű) cseppeket vizsgálunk egy áramlásban, akkor azt tapasztaljuk, hogy *mindegyik* csepp az instabil sokasághoz tart. Így az eltérő tulajdonságú (színű) cseppek határa egymáshoz igen közel kerül, vagyis a színek nagyon jól összekeverednek egy fonalas fraktál mentén. Az instabil sokaságtól távolabb azonban a keveredés gyenge lesz, a hamarosan kimenő részecskéknek nincs idejük, hogy jól elkeveredjenek. Ki lehet mutatni, hogy érvényesül az ún. *Wada-tulajdonság* (Toroczkai *et al.*, 1997): az instabil sokaság pontjainak tetszőlegesen kicsiny környezetében *minden* szín elő fog fordulni, ha elég sokáig várunk.



3.5. ábra. Műholdas felvételek a NASA archívumából. Fent: felhők a Kármán-féle örvényútban a Guadalupe-sziget mögött. Alsó képek: tengeri jég mintázata Kamcsatka közelében. Figyeljük meg a fonalas szerkezetet, amely *nem* az áramlási képet mutatja, hanem az *instabil sokaságot*.



3.6. ábra. Egy 300×300 részecskéből álló, a $[-0.25, 0.25] \times [-0.5, 0.0]$ tartományból induló csepp időbeli változása a kétfolyós kádban $\xi = 10$, $\eta = 0.5$ paraméterértékek esetén. Az egyes ábrák a csepp alakját mutatják a) $t = 0$, b) $t = 1$, c) $t = 2$, d) $t = 3$, e) $t = 4$ és f) $t = 5$ dimenziótlan idővel az indítás után. A bennmaradó részecskék egyre pontosabban kirajzolják az instabil sokaságot.

Összefoglalva, nyitott áramlásban sodródó részecskék

- egy nagy felületű, fonalas fraktálon, a kaotikus halmaz instabil sokaságán gyűlnek össze;
- anomáliásan hosszú időt töltenek itt; és
- jól elkeverednek a fraktál mentén.

Ezek a tulajdonságok nemcsak a bemutatott példában igazak, hanem minden nyitott áramlásban, ahol kaotikus sodródás zajlik. Ezért természetesen adódik az az ötlet, hogy ha a részecskék kémiai vagy biológiai *aktívak*, akkor nyitott áramlásokban az aktivitás nagy része egy szálas fraktál mentén fog zajlani; ott ahol jól elkeveredve sok időt töltenek a részecskék. A következő alfejezetben bemutatjuk, hogyan változtatja meg a fraktálszerkezet felbukkanása a kémiai aktivitást, és levezetünk egy új reakció egyenletet, ami ezt a hatást figyelembe veszi.

Hangsúlyozni kell, hogy bár a bemutatott példa kétdimenziós áramlás volt, térbeli áramlások hasonló viselkedést mutatnak. Ebben az esetben fraktálfonalak helyett *fraktálfelületek* lesznek a stabil illetve az instabil sokaságok.

3.2. Kémiai reakció nyitott áramlásokban

Az alfejezet Károlyi *et al.* (1999, 2004); Toroczka *et al.* (1998, 2001); Péntek *et al.* (1999); Tél *et al.* (2000, 2005) cikkei alapján készült.

Az egyszerűség kedvéért foglalkozunk az ún. *autokatalitikus* reakcióval, amely a természetben gyakran előfordul (Epstein, 1995). Ez egy „fertőzés” jellegű reakció, amelyben az A anyag, ha B-vel érintkezik, maga is B anyaggá válik: $A + B \rightarrow 2B$ (Muzzio és Ottino, 1989; Metcalfe és Ottino, 1994; Muzzio és Liu, 1996). Az ilyen típusú reakciókat az A és B anyag közötti éles határvonal, a *reakciófront* jelenléte jellemzi, amely valamilyen v_R reakciósebességgel mozog előre a B anyag felé (Kolmogorov *et al.*, 1937; Neufeld *et al.*, 2002b). Ilyen reakciókkal modellezhető többek közt az égés, a planktonok szaporodása, valamint a légköri ózon lebomlása; mindezen folyamatokban a közeg áramlása is jelentős szerepet játszik. Az égés során az A és B anyag szerepét az elégett és el nem égett anyagok veszik fel (Kiss *et al.*, 2003a,b). A planktonok esetében a szaporodás és az áramlás összjátéka vezet el a planktonvirágzásnak nevezett jelenséghez, amikor a plankton mennyisége hirtelen jelentősen megnövekszik (Abraham *et al.*, 2000). Az ózombomlási folyamatok során a ClO-ban gazdag sarki légtömegek fény hatására katalizálják az ózon lebomlását, de ezt a folyamatot fékezi a NO₂-ben gazdag légtömegeknek az ideáramlása a $\text{ClO} + \text{NO}_2 \rightarrow \text{ClONO}_2$ reakción keresztül (Edouard *et al.*, 1996b; Mariotti *et al.*, 2000).

Az autokatalitikus reakciók hagyományos leírása során az A anyag a illetve a B anyag b koncentrációjára írhatunk fel egyenleteket:

$$\frac{da}{dt} = -k_0 ab, \quad \frac{db}{dt} = k_0 ab, \quad (3.6)$$

ahol k_0 a reakció sebességét jellemző állandó. Mivel a két anyag együttes mennyisége megmarad, ezért $a + b$ állandó, vagyis a és b nem független. Bevezethető a $c \equiv b/(a + b)$ mennyiség,

amelyre (3.6) alapján teljesül, hogy

$$\frac{dc}{dt} = kc(1 - c), \quad (3.7)$$

ahol $k = k_0(a + b)$ jellemzi az átalakulás sebességét. Amennyiben az anyagok eloszlása nem állandó, hanem c helyfüggő, de feltéve, hogy a közeg egyelőre nem áramlik, azaz az anyagok mozgását csak molekuláris diffúzió határozza meg D_{diff} diffúziós állandóval, akkor c -re a következő egyenlet írható fel:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = kc(1 - c) + D_{\text{diff}} \nabla^2 c. \quad (3.8)$$

Ez a Fischer-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov egyenlet (Kolmogorov *et al.*, 1937; Fischer, 1937), amely két lényeges paramétert tartalmaz: a D_{diff} diffúziós állandót és a k reakciósebességet. Ezek a paraméterek meghatározzák a reakció sebességét (Cross és Hohenberg, 1993):

$$v_R = 2\sqrt{kD_{\text{diff}}}. \quad (3.9)$$

Eközben a reakció egy $\sqrt{D_{\text{diff}}/k}$ szélességű sávban zajlik, azon kívül vagy csak B anyag van ($c = 1$), vagy csak A ($c = 0$).

Ha a reakció és a diffúzió mozgó közegben, áramlásban zajlik, akkor a közeg mozgását is figyelembe kell venni. Ekkor a c változását a következő egyenlet adja meg:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)c = kc(1 - c) + D_{\text{diff}} \nabla^2 c, \quad (3.10)$$

ahol $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(r, t)$ a folyadék sebessége. Ez az egyenlet jelentős egyszerűsítéseket alkalmaz: elhanyagolja a sodródó részecskék tehetetlenségét és méretét, valamint a reakció visszahatását az áramlásra.

Ennek az egyenletnek a megoldása azonban igen nehéz tetszőlegesen előírt kezdő- és peremfeltételek és $\mathbf{v}(r, t)$ áramlás esetén. Ezért most olyan egyszerűbb egyenletet vezetünk le, amely a nyitott áramlásban kaotikusan sodródó, autokatalitikusan aktív anyagok reakcióját jól leírja. Az előző alfejezetben említettük, hogy a nyitott áramlásban sodródó részecskék igen gyorsan egy szálas fraktálalakzatra gyülekeznek, és a reakció javarészt ezen szálak mentén zajlik. A szálakat az áramlás egyre hosszabbra nyújtja, a nyúlás tipikus mértéke a Ljapunov-exponenssel jellemezhető exponenciális hosszabbodás. Ez az igen erős nyújtás a szálak mentén kisimít minden inhomogenitást. Emiatt elegendő a szálakra merőlegesen vizsgálni az anyagok eloszlását. Ezt az egyszerűsítést *szál-szelet* (filamental slice) modellnek nevezték el (Neufeld, 2001). Ha a szálaktól mért távolságot x -szel jelöljük, akkor a szálakra merőleges irányban az áramlás hatása egy erős, exponenciális összehúzóadás: az instabil sokaság felé lokálisan $-\sigma x$ sebességgel áramlik a folyadék. Itt σ az áramlás pozitív Ljapunov-exponense, amelynek nagysága kétdimenziós áramlásokban megegyezik a negatív Ljapunov-exponenssel az áramlás összennyomhatatlansága miatt. Emiatt a (3.10) egyenlet ebben az egy dimenziós modellben így írható:

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \sigma x \frac{\partial c}{\partial x} = kc(1 - c) + D_{\text{diff}} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (3.11)$$

Ezt az egyenletet fel lehet írni dimenziótlan egységekben. Vezessük be a lagrange-i értelemben vett Da Damköhler-számot és Pe Péclet-számot a következőképpen:

$$Da = \frac{k}{\sigma}, \quad Pe = \frac{\sigma L^2}{D_{\text{diff}}}, \quad (3.12)$$

ahol L a vizsgált tartomány jellemző mérete. Eredetileg a Damköhler-számot (Damköhler, 1936) és a Péclet-számot (Landau és Lifsic, 1988) az áramlás euleri jellemzőivel definiálták a következőképpen: $Da_{\text{eu}} = kL/U$ és $Pe_{\text{eu}} = LU/D_{\text{diff}}$, ahol U az áramlás jellemző sebessége. A Damköhler-szám a reakciósebesség és a kaotikus dinamika erősségének arányát jellemzi, ha $Da \gg 1$, akkor a reakció nagyon gyorsan zajlik le a folyadék mozgásához képest. A Péclet-szám a sodródás és a diffúzió relatív fontosságát jellemzi, ha $Pe \gg 1$, akkor a diffúzió hatását el lehet hanyagolni. A mi esetünkben az derült ki, hogy a folyadéknak *nem* az euleri jellemzője (az áramlás sebessége) lesz lényeges a reakciók szempontjából, hanem a lagrange-i jellemzői, vagyis a sodródó részecskék mozgását jellemző σ Ljapunov-exponens. Ezekkel a mennyiségekkel (3.11) dimenziótlan alakja

$$\frac{\partial c}{\partial t} - x \frac{\partial c}{\partial x} = Da c(1 - c) + \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (3.13)$$

ha bevezetjük a dimenziótlan hely- és időváltozókat az $x \rightarrow xL$ és $t \rightarrow t/\sigma$ változócserevel.

A minket érdeklő tartomány az lesz, amikor a diffúzió lassú, de a reakciók gyorsan lezajlanak. Ez a nagy Damköhler-szám és Péclet-szám tartománya, de úgy, hogy a kettő hányadosa véges marad. Ez a gyakorlati alkalmazások esetén csaknem mindig igaz, a reakciók gyorsak, és a keverés hatásához képest a molekuláris diffúzió elhanyagolható (Tél *et al.*, 2005). Ekkor a diffúziónak a reakciófrontot szélesítő hatását a kémiai reakció gyorsan eltünteti, vagyis éles reakciófrontot kapunk, míg az áramlás határozza meg a szálak alakját és hosszát. Ebben az esetben a vizsgált tartomány egyes részein még nem indult be a reakció ($c = 0$), más részein, a fraktálszálak belsejében, már teljesen lezajlott ($c = 1$), a kettő között pedig elhanyagolható a reakciófront szélessége, ahol $0 < c < 1$. Ez azt jelenti, hogy jó közelítéssel a reakció a fraktálszálak peremén zajlik, sehol máshol. Ez lehetővé teszi (3.11) további egyszerűsítését.

Tegyük fel, hogy egy t időpontban a fraktálszálak körül átlagosan egy $\delta(t)$ szélességű sávban már lezajlott a reakció, $c = 1$. Ez a $\delta(t)$ szálvastagság két hatás miatt változik. Egyrészt az instabil sokaság felé összenyomja az áramlás $-\sigma\delta$ arányban, másrészt a v_R reakciófront-sebességgel szélesedik a sáv a reakció hatására. Mivel a szélesedés a sáv mindkét oldalán zajlik:

$$\dot{\delta} = -\sigma\delta + 2v_R. \quad (3.14)$$

Ennek az egyenletnek van egy stabil fixpontja: $\delta^* = 2v_R/\sigma$. A (3.14) egyenlet megmondja, hogy egyetlen szálnak hogyan változik a szélessége. A nyitott áramlásban azonban nem egyetlen szál van lefedve reakciótermékkel, hanem szálaknak egy fraktálhalmaza.

Ahogy a Bevezetésben is említettük, a fraktálgeometria (Mandelbrot, 1977; Falconer, 1990; Tél, 1988) eredményei alapján, ha a fraktálszálakat lefedjük olyan „dobozokkal”, amelyeknek oldaléle ϵ , akkor az alakzat teljes lefedéséhez szükséges dobozok $N(\epsilon)$ száma függeni fog az alakzat, jelen esetben az instabil sokaság, D fraktáldimenziójától. Ezt a következőképpen lehet

kifejezni (1.4) képlettel összhangban (Mandelbrot, 1977; Falconer, 1990; Tél, 1988):

$$N(\epsilon) = \mathcal{H} \left(\frac{\epsilon}{L} \right)^{-D}, \quad (3.15)$$

ahol a \mathcal{H} dimenziótlan konstans a Hausdorff-térfogat, és L a vizsgált tartomány jellemző mérete. Ez az összefüggés kis ϵ -okra teljesül. A legkisebb dobozméret, ami a véges δ szélességű sávok lefedése során szóba jöhet, az maga a sáv szélesség, vagyis $\epsilon = \delta$. Mivel ekkor egy doboz területe (kétdimenziós áramlásban) δ^2 , ezért a teljes, a szálak által lefedett terület

$$A = \mathcal{H} L^2 \left(\frac{\delta}{L} \right)^{2-D}. \quad (3.16)$$

Mivel $c = 1$ a lefedett területen a (dimenziótlanított) koncentráció, ezért A/L^2 egyben a (dimenziótlan) anyagmennyiséget is jelenti, vagyis az autokatalitikus reakcióban keletkező termék mennyiségét.

Mivel a fraktáldimenzió nem függ az időtől, és ugyanezt feltéve a Hausdorff-térfogatról, képezhető a (3.16) egyenlet idő szerinti deriváltja: $\dot{A} = \mathcal{H} L^D (2 - D) \delta^{1-D} \dot{\delta}$. Behelyettesítve ide $\dot{\delta}$ helyére (3.14) kifejezést, majd a δ változót kifejezve (3.16) segítségével, a következő összefüggést kapjuk:

$$\dot{A} = -(2 - D)\sigma A + q(2 - D) \frac{v_R}{L} A^{\frac{1-D}{2-D}}, \quad (3.17)$$

ahol bevezettük a $q = 2(L^2 \mathcal{H})^{1/(2-D)}$ geometriai tényezőt. Kihasználhatjuk a tranziens káosz elméletének azt az eredményét (Kantz és Grassberger, 1985), hogy a fraktáldimenzió, a Ljapunov-exponens, és a κ úgynevezett *szökési ráta* között összefüggés van:

$$2 - D = \frac{\kappa}{\sigma}. \quad (3.18)$$

A szökési ráta (Tél, 1990; Károlyi és Tél, 1997) a nyitott áramlás megfigyelési tartományában tartózkodó részecskék számának időbeli változását írja le, ami időben exponenciálisan csökken, és ennek exponense a szökési ráta. Vagyis, ha $n(t)$ a még ki nem sodródott részecskék száma, akkor $n(t) \approx n(0)e^{-\kappa t}$. Vezessük be még a

$$\beta = \frac{D - 1}{2 - D} > 0 \quad (3.19)$$

mennyiséget, amely kizárólag az instabil sokaság, a fraktálszálak D fraktáldimenziójától függ, és mindig pozitív, hiszen $1 < D < 2$. Ezek alapján az anyagmennyiség időbeli változását leíró (3.17) egyenlet így írható:

$$\dot{A} = -\kappa A + q\kappa \frac{v_R}{\sigma L} A^{-\beta}. \quad (3.20)$$

Ez az egyenlet tehát leírja, hogyan változik a termék mennyisége egy autokatalitikus reakció során, amely nyitott áramlásban zajlik. Az első tag az egyenlet jobb oldalán a kiáramlás hatását írja le. A második tag a reakció miatti anyagmennyiség változást írja le, és ebben megjelennek a sodródás kaotikus voltát jellemző mennyiségek: a σ Ljapunov-exponens, a κ szökési ráta és a D fraktáldimenzió. Ez az egyenlet markánsan eltér a klasszikus (3.7) egyenlettől, amely most

csak *lokálisan* teljesül. Az áramlás hatására kialakuló szálas fraktálmintázat alapvető hatást gyakorol a kémiai aktivitásra.

Amennyiben az áramlásban sodródó részecskék sodródása nem kaotikus, azaz a szálasság nem alakul ki, a reagáló anyagok közötti reakciófront sem lesz fraktál, vagyis $D = 1$ lesz. Ekkor (3.20) egyszerűsödik, $\beta = 0$ miatt a jobb oldalon a második tag konstans lesz, ami egy klasszikus felületi reakciónak felel meg. Ha azonban a sodródás kaotikus, a reakciófront jelentősen megnyúlik a nem-kaotikus esethez képest, fraktállá válik, és a reakció lefolyása jelentősen felgyorsul, a második tag igen nagy lehet. Valójában minél kevesebb anyag lesz jelen a vizsgált tartományban, azaz minél kisebb A , annál nagyobb lesz a negatív kitevő miatt a második tag, tehát annál gyorsabban nő az anyagmennyiség. Viszont ha sok anyag van, azaz A nagy, akkor a kifolyás szerepe, az első tag nő meg. Ez a két vetélkedő hatás végülis egy dinamikus egyensúlyhoz vezet, amikor a megfigyelési tartományban az anyag mennyisége nem változik, a reakcióban termelődő anyag mennyisége azonos a kiáramló mennyiséggel.

A (3.20) egyenletet a legegyszerűbb esetre vezettük le: kétdimenziós, időben periodikus áramlásban zajló autokatalitikus reakcióra. A (3.18) használatával még azt is feltettük, hogy az áramlás hiperbolikus, nincsenek benne olyan „reguláris szigetek”, mint az előző fejezet 2.14 ábráján. Megmutatható azonban, hogy mindezek nem lényeges megszorítások. Saját és mások későbbi munkái a bemutatotthoz hasonló egyenletet vezettek le háromdimenziós (de Moura és Grebogi, 2004a), nemperiodikus (Károlyi *et al.*, 2004), nemhiperbolikus (Motter *et al.*, 2003; de Moura és Grebogi, 2004b) áramlásokra, megvizsgálták a sodródó részecskék inerciájának hatását (Nishikawa *et al.*, 2001, 2002; Tél *et al.*, 2004), és más típusú reakciókat (lángot (Kiss *et al.*, 2003a,b), bistabil (Neufeld, 2001; Neufeld *et al.*, 2002a) és sav-bázis (Károlyi *et al.*, 1999) reakciókat) is. Mindezen esetekben hasonló reakcióegyenletet lehetett levezetni, amelyekben közös a fraktáltulajdonságoktól függő tag. Ezen eredmények átfogó bemutatása meghaladja ezen dolgozat kereteit, egy hosszabb lélegzetű összefoglaló cikkünk a közelmúltban jelent meg erről a témáról (Tél *et al.*, 2005).

A levezetett új reakcióegyenlet alapján kimondjuk a dolgozat következő tézisé:

4. tétel. *Nyitott hidrodinamikai áramlásokban a részecskék egy bonyolult, szálas fraktálalakzatra gyűlnek össze. Ezen a fraktálalakzaton hosszú időre csapdába esnek a kisodródásuk előtt, így ha a sodródó részecskék kémiailag vagy biológiailag aktívak, akkor az aktív folyamatok egy szálas fraktálalakzaton zajlanak. Megmutattam, hogy az áramlás mechanikai tulajdonságai módosítják a hagyományos reakcióegyenletet, az új kémiai egyenletben megjelenik a sodródó részecskék eloszlását jellemző fraktáldimenzió.*

3.3. Szálas fraktálok és planktonok nyitott áramlásban

Az alfejezet Károlyi *et al.* (2000, 2002, 2005) és Scheuring *et al.* (2000, 2003a,b) cikkei alapján készült.

A Bevezetésben említettük, hogy az áramló közegben élő (például fitoplankton) populációk dinamikáját hagyományosan azok átlagos koncentrációjával írják le. Ez azt feltételezi, hogy az áramlás, amelyben ezek a populációk élnek, homogén módon elkeveri az összes fajt. Az egyes fajok egyedszám-sűrűségét (vagy „koncentrációját”) emiatt a következőhöz hasonló egyenle-

tekkel szokták leírni (Gurney és Nisbet, 1998):

$$\dot{A}_i = b_i A_i - c_i A_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.21)$$

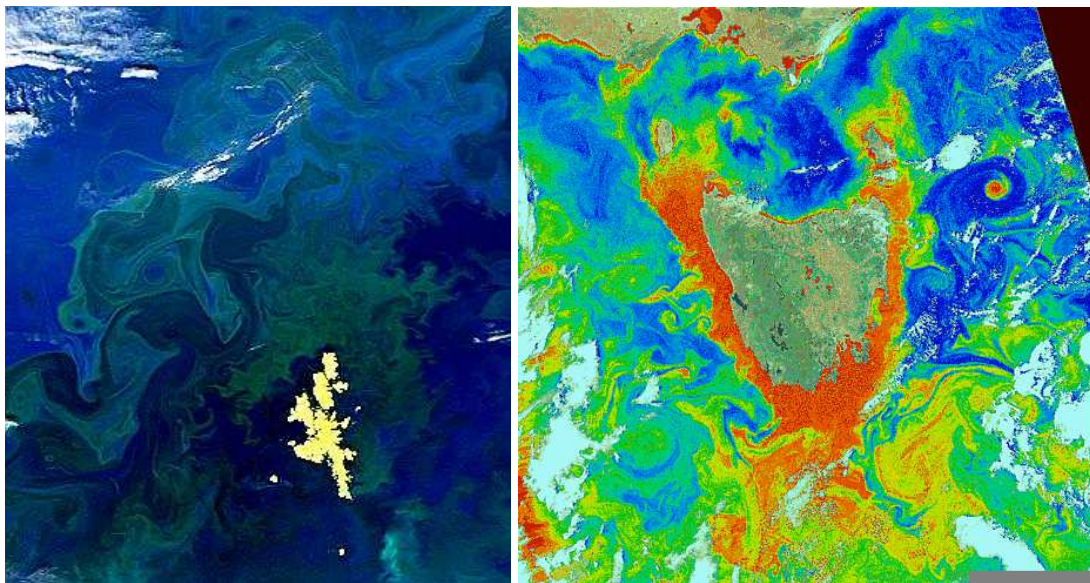
ahol i sorszámozza az N különféle fajt. A b_i és c_i mennyiségek jellemzik az új születések számát és a természetes kihalást, és függvényei lehetnek a rendelkezésre álló nyersanyagoknak (pl. tápanyagok, oxigén, fény stb.). Megmutatható, hogy ezeknek az egyenleteknek csak olyan megoldása lehet, ahol az együttélő (nem zérus egyedszámú) fajok száma nem több, mint a nyersanyagok száma (Gurney és Nisbet, 1998), jól kevert környezetben csak azok a fajok maradhatnak fenn, amelyek legalább egy nyersanyag felhasználásában a legrátermettebbek (Epstein, 1995; Gause és Witt, 1935; Hardin, 1960). Ez azonban ellentmondásban van a nyilvánvaló tapasztalattal: a szükséges erőforrások száma (nem több tíznél) jóval alacsonyabb, mint az együttélő fitoplankton-fajok száma (akár több száz). Ez a *plankton-paradoxon* (Hutchinson, 1961).

Az előzőekben azonban láttuk, hogy ha az áramlás nem turbulens, de azért időfüggő, akkor a keverés *nem tökéletes*, a kaotikusan sodródó részecskék szálas struktúrákat rajzolnak ki. Ha az áramlás nyitott, akkor ezek a szálas fraktálszerkezettel rendelkeznek. A biológiai aktivitás szempontjából, például a planktonpopulációk szempontjából az áramlás gyakran nyitottnak tekinthető, hiszen pl. az óceán egy bizonyos kiszemelt tartományából kisodródó planktonok igen ritkán tudnak ide visszatérni az óceáni áramlások tipikus időskálájánál jóval rövidebb élettartamuk alatt. Várható tehát, hogy a planktonpopulációk életük során tipikusan szálas struktúrákat alkotnak, ahogy azt a 3.7 ábra is mutatja, és ezek jellemezhetők a fraktálgeometria eszközeivel.

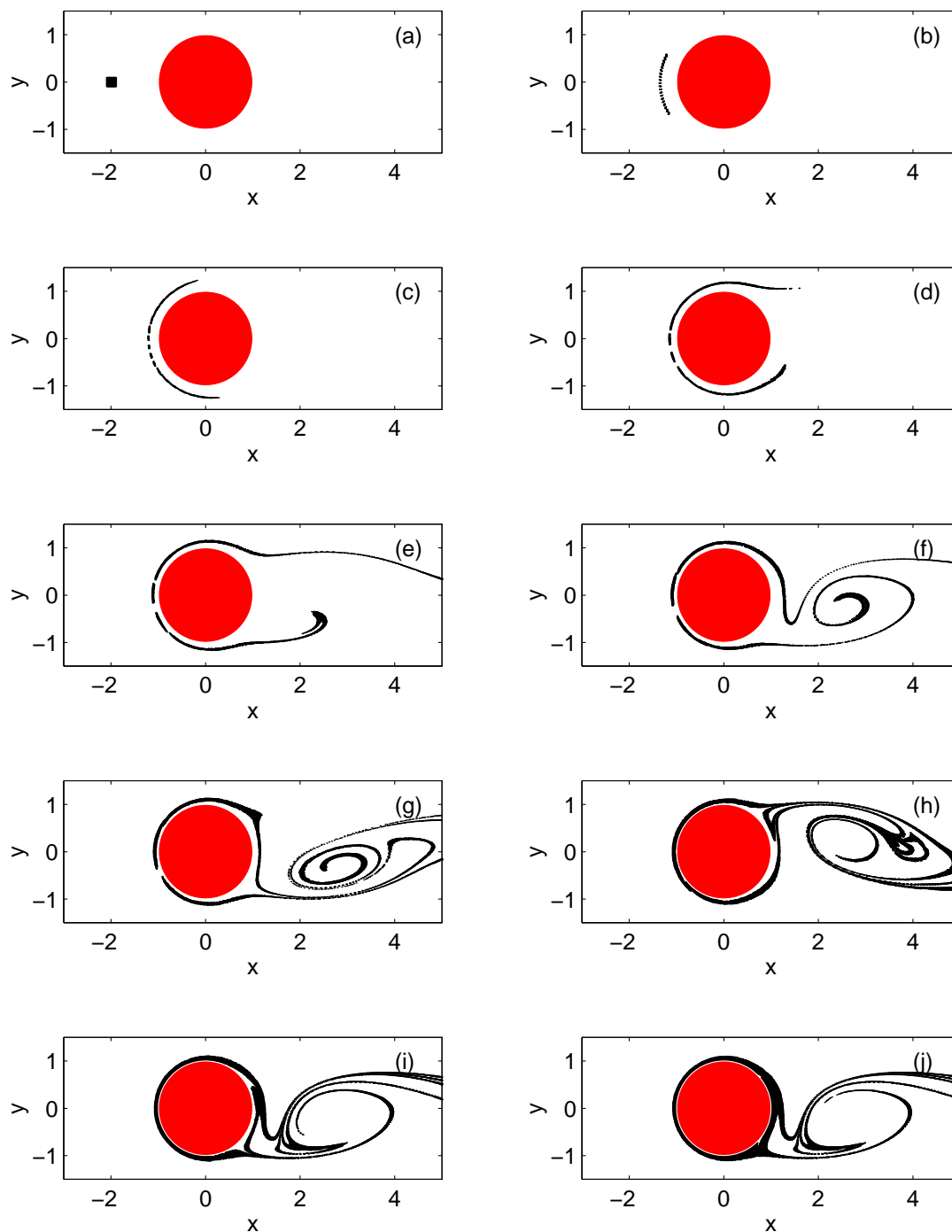
A planktonok szaporodása jó közelítéssel tekinthető autokatalitikus folyamatnak: a sodródás közben talált nyersanyagok felhasználásával saját másolataikat állítják elő. A természetes kihalást el lehet hanyagolni egy nyitott áramlásban, mert ha a kihalás mértéke jelentős lenne is a vizsgált tartományban töltött véges idő alatt, annak hatása legfeljebb kissé módosítja a κ szökési rátát, más hatása nem lesz. A nyitott áramlásokban zajló autokatalitikus folyamatok esetében viszont láttuk a (3.20) egyenlet kapcsán, hogy a negatív kitevő igen erősen megnöveli az aktivitást, ha az autokatalitikusan szaporodó egyedekből kevés van. A planktonpopulációk esetében ez azt jelenti, hogy ha egy faj gyengébb, a kihalás közelébe kerül, akkor a (3.20) jobb oldalán a második tag rendkívül nagy lehet, és ez megmentheti a kihalástól. Másképpen mondva, ez a *ritka előnye*: ha kis mennyiségben van jelen valamelyik faj, akkor egy sokkal finomabb felbontását fedik le az instabil sokaság fraktálszámainak, kisebb lesz a δ átlagos lefedési szélesség, így több fraktálszálat tudnak lefedni, és sokkal nagyobb lesz az általuk lefedett terület határa, ahol hozzájutnak a nyersanyagokhoz. Ennek alapján azt várjuk, hogy ha több faj verseng néhány nyersanyagért, akkor a gyengébbek kihalását éppen a ritkaságuk gátolhatja meg.

A helyzet persze ennyire nem egyszerű. Ha nemcsak egy faj szaporodik az instabil sokaság mentén, akkor kérdéses, hogy ezek hogyan oszlanak meg az instabil sokaság fraktálszámai mentén. Vagyis, több versengő faj esetén a (3.20) egyenlet nem pontosan teljesül. Hogy lehetséges-e több faj együttélése, azt numerikus szimulációk segítségével fogjuk megvizsgálni.

Először vizsgáljuk meg egyetlen faj autokatalitikus reakcióként modellezett reprodukcióját nyitott áramlásban! Példaként a 3.8 ábrán a Kármán-féle örvényútban élő egyetlen planktonfaj viselkedését láthatjuk. Kezdetben az egész populáció egyetlen kis cseppben helyezkedik el az áramlásba helyezett henger alakú akadály előtt. A folyadék besodorja a henger mögötti időfüggő áramlásba, ahol nyújtások és hajtogatások gyors egymásutánjának lesz kitéve, és szálas

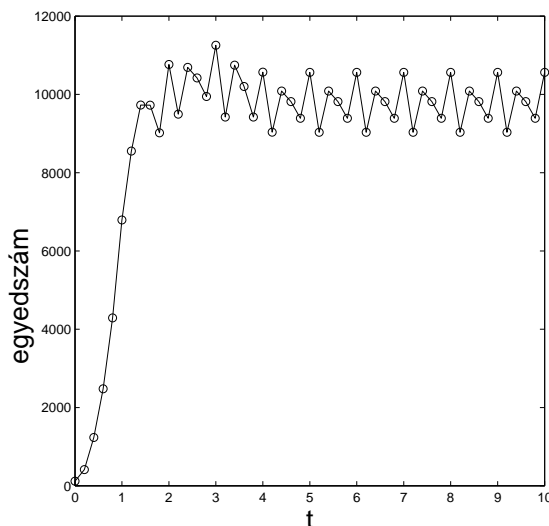


3.7. ábra. Műholdas felvételek planktonvirágzásról (a NASA archívumából). A bal oldali felvételen (2000. május 12., Shetland-szigetek környéke) a világos területek felhők, a kék árnyalatai mutatják a planktonkoncentrációt. A jobb oldali felvétel (1981. november 27., Tasmán-sziget környéke) középen a Tasmán-sziget, a kép felső részén Ausztrália déli partja látható. A mesterségesen színezett ábrán a melegebb (vörös, sárga) színek a magasabb klorofill koncentrációt (és így a magasabb fitoplankton-tartalmat) mutatják. Szembeszökő a planktonpopulációk fonalas eloszlása mindkét képen.

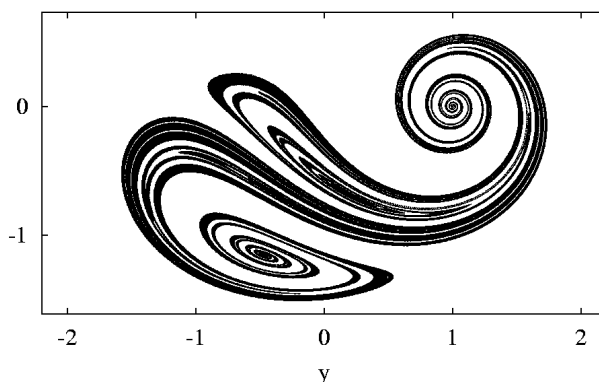


3.8. ábra. Planktonfaj szaporodása és sodródása a Kármán-féle örvényútban. Kezdetben az a) ábrán látható fekete négyzetben helyezkedik el a plankton, a tápanyagot hordozó folyadék fehér. Az egyes ábrák az a) $t = 0$, b) $t = 1/5$, c) $t = 2/5$, d) $t = 3/5$, e) $t = 4/5$, f) $t = 1$, g) $t = 6/5$, h) $t = 8/5$, i) $t = 2$ és j) $t = 3$ időpontokban készültek, ahol az áramlás időperiódusa 1. A folyadék balról jobbra áramlik.

fraktálszerkezetűvé alakul a csepp. Hamarosan (kb. két teljes időperiódus után) a kialakuló populáció alakja időben periodikus lesz, eléri a (3.20) egyenlet stabil helyzetét: a keletkező és a kisodródó egyedek száma lényegében meg fog egyezni, ahogy azt a 3.9 ábra is mutatja. Hasonló viselkedést tapasztalunk, ha a kétnyelős kádban kialakuló áramlásban követjük egy autokatalitikusan reprodukálódó faj viselkedését, ahogy azt a 3.10 ábra mutatja.



3.9. ábra. A Kármán-féle örvényútban szaporodó és sodródó planktonfaj egyedszámának időbeli változása.



3.10. ábra. Planktonfaj eloszlása a kétnyelős kádban. Fekete szín jelöli a planktont, fehér a tápanyagot hordozó folyadék.

A numerikus szimuláció során alkalmazott eljárás a következő. Az áramlási tér megfigyelési tartományát, ahol a részecskék mozgását kívánjuk követni, azonos, ϵ oldalélű négyzetráccsal

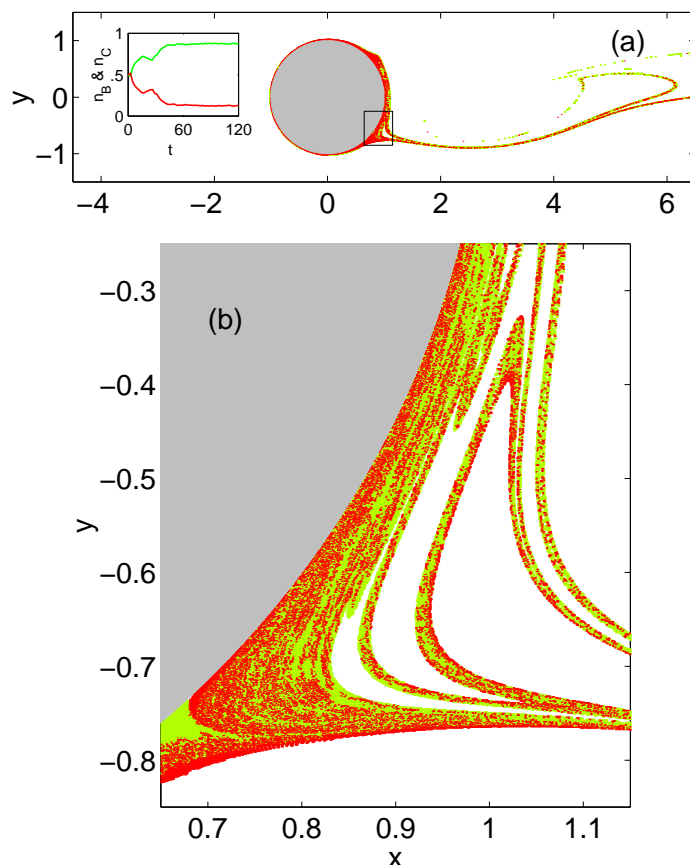
fedjük le. A sodródó részecskék ennek a rácsnak egy-egy celláját foglalják el, minden cellában csak egy egyed lehet, tehát a cellák mérete megfelel a planktonegyedek átlagos távolságának. A sodródási és szaporodási folyamatot két lépés egymás utáni alkalmazásával modellezzük, ez a két lépés ismétlődik felváltva. A szimuláció első lépésében a sodródó részecskék az áramlásnak megfelelő módon egy rövid τ ideig elmozdulnak, az új helyzetüket (1.3) megoldásával kapjuk. A megoldáshoz vagy a negyedrendű Runge-Kutta-módszert használjuk (pl. a Kármán-féle örvényút esetében, ahol az áramlás sebességterét egy explicit modell adja meg Jung *et al.* (1993) cikke alapján), vagy ha az áramlás szakaszonként integrálható, akkor expliciten ki lehet számítani (pl. a kétnyelős kád esetében). Ha egy részecske a megfigyelési tartományon kívülre kerül, akkor nem követjük tovább, töröljük azt az egyedet. Amikor minden részecskének megvan az új helyzete τ idővel később, akkor azokból a cellákból, amelyekbe egynél több részecske került, egy kivételével mindet töröljük. Ezután következik az aktív lépése az algoritmusnak: minden olyan üres cellába, amelynek a szomszédjában van részecske, egy új egyed születik: vagyis ahol üres és teli cella találkozik, ott az üresből is teli lesz az $A + B \rightarrow 2B$ autokatalitikus folyamatnak megfelelően. Vagyis a részecskék „megfertőzik” a szomszédos üres cellákat. Ekkor az új részecskék pontosan az üres cella közepén születnek. A reakciótávolság tehát megegyezik a cellák ϵ méretével. Mivel τ időközönként történik szaporodás ϵ távolságra, ezért a reakciósebesség lényegében $v_R = \epsilon/\tau$. A folytonos reakció esetét úgy kaphatjuk meg, hogy ϵ és τ értéke is nullához tart, de hányadosuk, v_R véges marad.

Modellezzünk most több, versengő autokatalitikus folyamatot! Ekkor előfordulhat, hogy a sodródási szakasz illetve a szaporodási szakasz során egy cellába *eltérő fajok* egyedei is bekerülnek. Mivel feltevésünk szerint csak egy egyed lehet egy cellában, ilyenkor véletlenszerűen kisorsoljuk, hogy melyik marad meg, így annak a fajnak lesz több esélye a megmaradásra, amelyik több egyedet juttatott be az adott cellába.

Az egyes versengő fajok tulajdonságai nem egyformák. Ezt többféleképpen lehetett figyelembe venni. Az egyik lehetőség az volt, hogy beiktattunk egy kihalási lépést is a szimulációba: minden egyes egyedet egy adott, fajra jellemző valószínűséggel töröltünk. Amelyiknek ez a kihalási valószínűsége kisebb volt, annak volt több esélye az életben maradásra. Egy másik lehetőség az volt, hogy megnöveltük a szaporodási távolságát a rátermettebb fajoknak: ők nemcsak a szomszéd cellákba tudtak egyedeiket szülni, hanem valamilyen annál nagyobb, fajra jellemző sugarú körön belül mindenhova. Ezzel több esélyük lett a szaporodásra, gyakrabban találtak üres cellákat, ahová szaporodhattak. A harmadik lehetőség az volt, hogy a gyengébbik, kevésbé rátermett faj egyedei nem minden τ időközönként szaporodtak, hanem csak annál ritkábban, ezzel csökkentve az ő szaporodásuk sikerét. Akár egyszerre többet is lehet alkalmazni ezen lehetőségek közül.

Egy tipikus szimulációs eredményt a 3.11 ábra mutat. Itt két versengő fajt látunk, amelyek együtt élnek a Kármán-féle örvényútban. A két faj egyedei eltérő időközönként szaporodtak. A hagyományos elmélet szerint a rátermettebb faj élhetné csak túl a versengést egy jól kevert környezetben, hiszen csak egyetlen „nyersanyag” van ebben a szimulációban: a hely. A 3.11 ábrán azonban jól látszik, hogy a környezet nem jól kevert, a két faj együtt tud élni az instabil sokaság fraktálszámain. A kihalást el tudja kerülni a gyengébbik, kevésbé rátermett faj is a „ritkább előnyét” kihasználva: a ritkább versengő a fraktálszálak egy finomabb felbontását tudja lefedni, és így nagyobb hossz mentén fér hozzá az üres helyekhez. Ez az egyszerű szimuláció tehát

azt mutatja, hogy a nyitott áramlásban a versengő egyedek könnyebben együtt tudnak létezni, mint az áramlás nélkül, vagy éppen jól kevert környezetben. Hasonló eredményeket kaptunk akkor is, ha kettőnél több versengő fajt vizsgáltunk nyitott áramlásban: ha azok rátermettsége nem különbözött túlságosan, akkor együtt tudtak élni. Tehát a nyitott áramlás mechanikai tulajdonságai *erősítik a biodiverzitást*.



3.11. ábra. A Kármán-féle örvényútban autokatalitikusan szaporodó és sodródó, versengő planktonfajok. A kép 24 periódussal az indulás után készült. Kezdetben egy-egy 0.07×0.76 méretű, téglalap alakú tartományból indult a zöld illetve a piros színekkel jelölt faj is (az ábrán nincs feltüntetve), a téglalapok közepe az $x = -1.36$ (zöld) illetve $x = -1.10$ (piros), $y = 0$ helyen volt (a henger sugara egységnyi, és a középpontja az origó). Az egyes fajok egyedszámának időfüggését mutatja az a) ábra grafikonja, látható, hogy a fraktálszálak mentén bármeddig együtt tudnak élni a versengő fajok. A szimuláció során a négyzetrács mérete $\epsilon = 1/500$ volt, ez volt mindkét faj szaporodási távolsága is. Az egyes fajok eltérő időközönként szaporodtak: zöld esetén $\tau_1 = 0.6$, piros esetén $\tau_2 = 0.8$ volt, ahol az áramlás periódusideje egységnyi. A kihalási valószínűségük azonos: $1/10$. A b) ábra az a) ábrán téglalappal jelölt rész kinagyítása. Az áramlás balról jobbra halad.

Az együttélés tényén túlmenően, az instabil sokaság fraktáltulajdonságait kihasználva, új típusú populációdinamikai egyenleteket is le tudtunk vezetni az autokatalitikus folyamatokkal

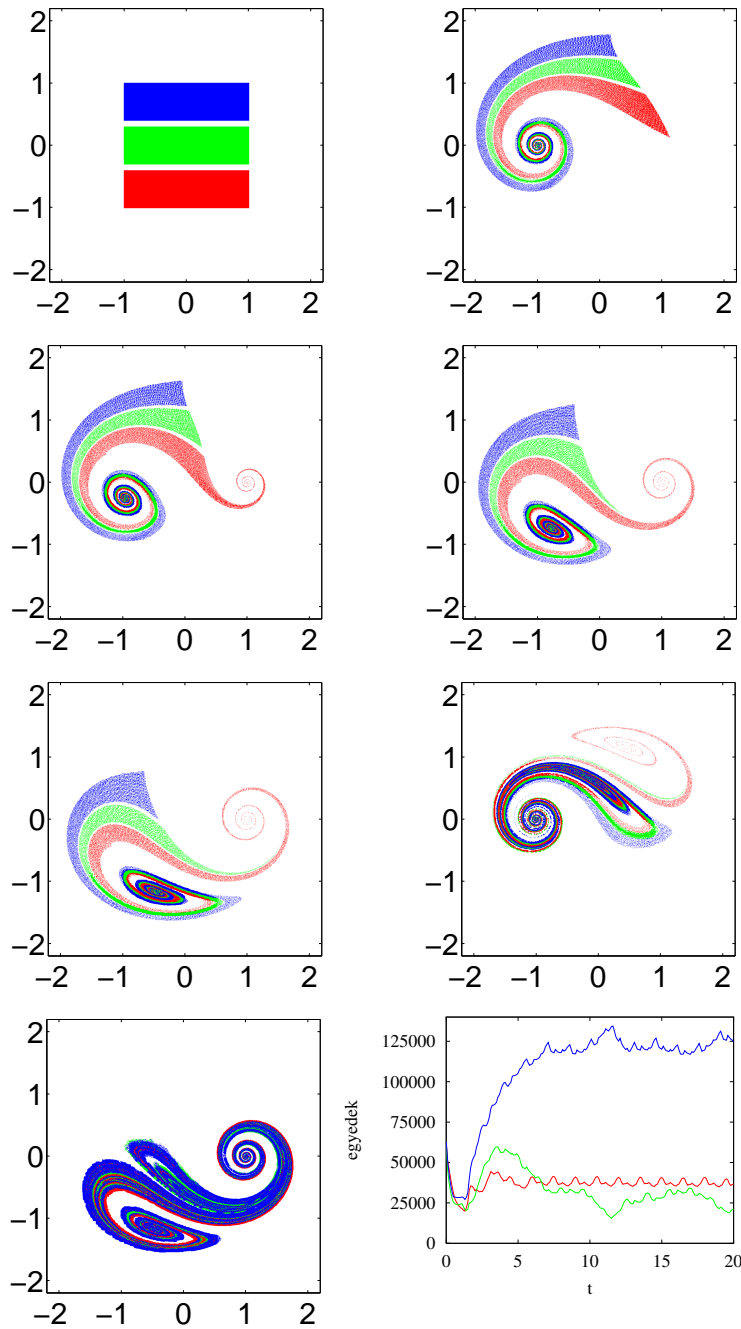
modellezett versengés esetére (Scheuring *et al.*, 2003b). Ez az egyenlet, (3.20) egyenlethez hasonlóan, tartalmazza a nyitott áramlásban történő kaotikus sodródás jellemző mennyiségeit, a szökési rátát, a Ljapunov-exponenst és a fraktáldimenziót, azonban sokkal bonyolultabb, mint (3.20), és itt nem részletezzük.

Azt is megvizsgáltuk (Benczik *et al.*, 2006), hogyan alakul az autokatalitikusan szaporodó fajok együttélése akkor, ha figyelembe vesszük azt, hogy az egyedeknek van kicsiny mérete és tehetetlensége is. Korábbi vizsgálatok (Benczik *et al.*, 2002, 2003) azt mutatták, hogy ekkor az eltérő méretű és tehetetlenségű részecskék más-más szálas fraktálon gyülekeznek az áramlás hatására. Azt vártuk, hogy ez a más-más fraktálon gyülekezés még jobban elősegíti, hogy gyengüljön a verseny a fajok között, és átfogó numerikus eredményeink ezt maradéktalanul alá is támasztották (Benczik *et al.*, 2006).

Természetesen vannak olyan élőlények, amelyeknek a szaporodási mechanizmusa jóval bonyolultabb, mint egy egyszerű autokatalitikus folyamat. Megvizsgáltunk másfajta, a biológiai szakirodalomból ismert szaporodási-versengési modellt is. Az egyik ilyen példa az úgynevezett *metabolikus hálózat*. Ezt a modellt a korai evolúció modellezése során vezették be (Czárán és Szathmáry, 2000). Ebben a modellben az egyedek önmagukat reprodukáló makromolekulák, amelyek az elérhető nyersanyagokért versengenek, miközben mindannyian nyersanyagokat biztosítanak egymás számára is. A modellben a versengők kémiaiilag katalizálnak egy közös metabolikus rendszert, amely cserében energiában gazdag monomerekkel látja el a versengőket, amiből ők fel tudják építeni saját másukat, és így szaporodnak. A feltevések szerint (Czárán és Szathmáry, 2000; Károlyi *et al.*, 2002) a metabolizmus működtetéséhez, és így a szaporodáshoz, mindegyik faj egyedeire szükség van a szaporodni készülő egyed környezetében. Vagyis, ha egyetlen faj is kihal, az összes többi is elpusztul. Habár emiatt az együttműködés miatt a versengés gyengébb, mint az autokatalitikus modell esetén, erre a modellre is igaz, hogy jól kevert rendszerben nincs együttélés, egy faj kihalását követően minden faj kipusztul. Más a helyzet azonban, ha a folyamat egy nyitott áramlásban, például a kétnyelős kádban zajlik, ahogy azt a 3.12 ábra mutatja. Az ábra szerinti kezdőfeltétellel indítva a három fajt, azok kezdetben nem tudnak szaporodni, mert túl távol vannak ahhoz, hogy bármelyiknek a kis (metabolikus) környezetében az összes faj egyedei megjelenjenek. Ahogy azonban az áramlás elkeveri a három fajt, közel kerülnek egymáshoz, és a szaporodás beindul. Most is érvényesül azonban a ritka előnye: ha valamelyik versengő faj egyedeiből kevés van, akkor szaporodás csak ott lehetséges, ahol az ő egyedei előfordulnak, máshol az ő hiányában nem indulhat be szaporodás. Ahol viszont szaporodás zajlik, ott a kihalófélben levő faj is képes lesz szaporodni, a fraktálszerkezetű szálak mentén ő is hozzájut az üres helyekhez.

Mindezen eredmények alapján kimondható a dolgozat 5. tézise:

5. tétel. Numerikus kísérletek segítségével megmutattam, hogy a nyitott áramlásokban sodródó részecskék bonyolult eloszlása tökéletlen keveredéshez vezet, amely lehetővé teszi versengő planktonpopulációknak a hagyományos populációdinamikai egyenletek által kizárt együttélését. A nyitott hidrodinamikai áramlások mechanikai tulajdonságai erősítik a biodiverzitást.



3.12. ábra. A kétnyelős kádban versengő, metabolikus hálózatot alkotó fajok együttélése. A három faj (kék, zöld, piros) hamarosan kirajzolják az instabil sokaság szálas fraktálszerkezetét, majd a mentén együtt élnek. A képek a) $t = 0$, b) $t = 0.5$, c) $t = 0.6$, d) $t = 0.8$, e) $t = 1$, f) $t = 1.5$ és g) $t = 10$ idővel az indítás után készültek, ahol az áramlás periódusideje egységnyi. Az utolsó ábra a három populáció egyedszámának változását mutatja az idő függvényében.

4. fejezet

Növekvő szálak és szálak struktúrák

Ebben a fejezetben növekvő szálakkal és szálak struktúrákkal foglalkozunk. Ezeket a vizsgálatokat egyrészt a szálakból álló mikroorganizmusok növekedésének mechanikai modellezése motiválta, másrészt a 3. fejezetben a nyitott hidrodinamikai áramlásokkal kapcsolatos vizsgálatokat szerettük volna zárt áramlásokra kiterjeszteni. Először a 4.1 alfejezetben egy növekvő mikroorganizmus-szálnak az alakját próbáljuk meghatározni: véve a hosszmeteszét, annak kontúrjára kinematikai egyenleteket írunk fel. Ezt követően a 4.2 alfejezetben az ilyen növekvő szálakból felépülő teljes kolónia növekedését vizsgáljuk a fraktálgeometria eszközeivel; kimutatjuk, hogy a biomassa növekedése csatolódik a telep időben változó fraktáldimenziójához. Ugyanez az ötlet segít a zárt áramlásban sodródó, kémiaiailag aktív anyagok reakcióegyenletének levezetésében a 4.3 alfejezetben. Mindegyik alfejezet végén egy-egy tézis formájában foglaljuk össze az eredményeket.

4.1. Növekvő síkbeli görbék és a hifa

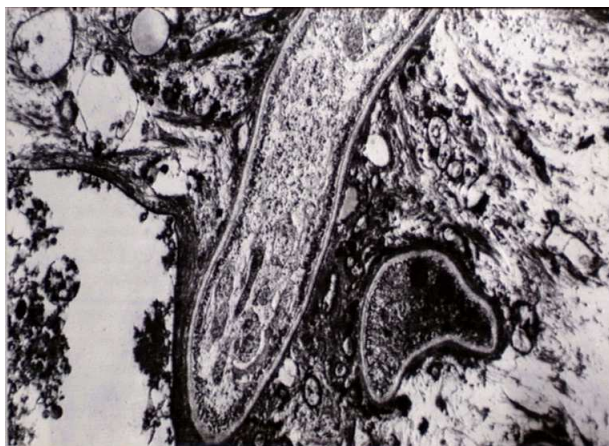
Ez az alfejezet Goriely *et al.* (2005) cikke alapján készült.

A szálak szerkezetű baktériumok és gombafonalak növekedését egy általános kinematikai egyenlettel szeretnénk leírni. A 4.1 ábra példaként egy gombafonal (hifa) növekvő csúcsának a hosszmeteszét mutatja. A hosszmeteszét kontúrját írjuk le egy görbe paraméteres egyenleteként egy olyan koordináta-rendszerben, amelynek y tengelye megegyezik a hifa tengelyével, ahogy azt a 4.2 ábra mutatja. Legyen ez a görbe $X(\sigma, t)$, ahol σ a $t = 0$ időpontban a görbe ívhossza a hifa csúcsától mérve. Az aktuális ívhossz valamely t időpontban legyen s a hifa csúcsától mérve. Vagyis a növekvő görbe egy kezdetben σ helyen levő pontjának ívhossz szerinti koordinátája $s = s(\sigma, t)$ lesz t idővel később. Ezzel az átparaméterezéssel a görbe, vagyis a hosszmeteszét kontúrjának egyenlete $X(s, t) \equiv X(s(\sigma, t), t)$ alakban is felírható.

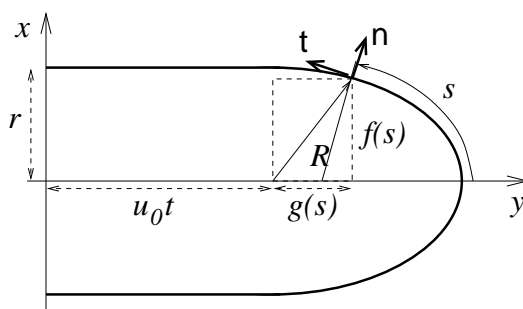
A görbe növekedik, vagyis az egyes anyagi pontok s ívhossz-koordinátája változik. Jellemezzük a megnyúlást a következő mennyiséggel:

$$\lambda \equiv \lambda(\sigma, t) = \frac{ds(\sigma, t)}{d\sigma}. \quad (4.1)$$

Ekkor két egymáshoz közeli pont távolsága $ds \approx \lambda d\sigma$, a fajlagos nyúlás a hossz mentén pedig $\varepsilon = \lambda - 1$. A megfigyelések szerint a hifa alakja, külső hatások híján, nem változik, állandó



4.1. ábra. A *Candida* gombafonalának hosszszelvénye (University of Bristol). A fonal a csúcsánál növekszik, de a tápanyagot a fonal teljes hossza mentén fel tudja venni.



4.2. ábra. A növekvő hifa geometriája.

marad, csak haladó mozgást végez (Prosser és Tough, 1991). Ez azt jelenti, hogy a görbe alakját leíró $X(s, t)$ csak translációt végez, ennek a mozgásnak a sebessége legyen u_0 . Ez a sebesség a biológiai jellemzőktől függ (Prosser és Tough, 1991; Saunders és Trinci, 1979; Gray *et al.*, 1990; Chater és Losick, 1997), és paraméternek tekintjük. Ekkor az alakot jellemző $X(s, t)$ kereshető ebben a formában:

$$X(s, t) = \begin{bmatrix} f(s) \\ g(s) + u_0 t \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

ahol feltettük, hogy a szál az y tengely mentén növekszik, és $f(s)$ és $g(s)$ egyelőre ismeretlen függvények, a görbe alakját írják le az ívhossz szerint paraméterezve, l. a 4.2 ábrát. A $t = 0$ időpontban $s = \sigma$, és így $f(\sigma)$ és $g(\sigma)$ a kezdeti alakot adják meg, ez halad előre az y tengely mentén u_0 sebességgel, miközben az alak megmarad.

Egy kiszemelt pont sebessége a növekedés közben:

$$\frac{dX(s, t)}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{f}_s \\ \dot{g}_s + u_0 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

ahol \dot{s} a vizsgált pont ívhossz koordinátájának idő szerinti deriváltja, f_s illetve g_s pedig $f(s)$ illetve $g(s)$ ívhossz szerinti deriváltja. Ez a sebesség felbontható érintő- és normálirányú komponensekre:

$$\frac{d\mathbf{X}(s, t)}{dt} = u\mathbf{n} + w\mathbf{t}, \quad (4.4)$$

ahol u és w a normál-, illetve érintőirányú sebesség nagysága, és

$$\mathbf{t}(s, t) = \frac{\partial \mathbf{X}(s, t)}{\partial s} = \begin{bmatrix} f_s \\ g_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}(s, t) = \begin{bmatrix} -g_s \\ f_s \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

az érintő illetve (kifelé mutató) normál egységvektor. Mivel \mathbf{t} egységvektor, ezért

$$f_s^2 + g_s^2 = 1. \quad (4.6)$$

Összevetve a (4.3) és (4.4) szerinti sebességeket \mathbf{t} -vel vagy \mathbf{n} -nel szorozva, megkapható a normál- és érintőirányú sebesség:

$$u = u_0 f_s, \quad w = \dot{s} + u_0 g_s. \quad (4.7)$$

A (4.6) és (4.7) egyenletek az általános kinematikai feltételét adják annak, hogy görbénk, a hifa hosszszelvényének kontúrja, a növekedés közben megtartja alakját, csak y irányba halad előre konstans u_0 sebességgel. Ebben a három egyenletben azonban még öt ismeretlen van: $f(s)$, $g(s)$, $u(s)$, $w(s)$ és $s(\sigma, t)$, tehát még két összefüggést kell keresni köztük. Ezek már nem egyszerű geometriai összefüggések lesznek, hanem biológiai megfigyeléseken alapulnak.

A megfigyelésekkel összhangban (Reinhardt, 1892; da Riva Ricci és Kendrick, 1972) tegyük fel, hogy az egyes pontok sebessége mindig merőleges a görbére, vagyis az érintőirányú sebesség zérus,

$$w = \dot{s} + u_0 g_s = 0. \quad (4.8)$$

Ezen a módon a hifa el tudja kerülni, hogy szilárd közegben le kelljen győznie a súrlódást, amivel a felületi pontok érintő irányú mozgása járna.

Az utolsó szükséges egyenlet felírásához számítsuk ki, hogy mennyivel növekszik a felülete a hifának! Tekintsünk két közeli, egymástól Δs ívhossz mentén vett távolságra levő keresztmetszetet, a kettő közötti hifa-szakasz felülete, ahogy azt a 4.3 ábra mutatja:

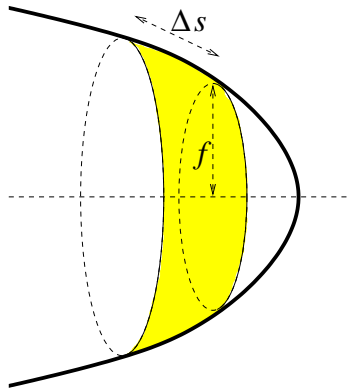
$$\Delta A = 2\pi f \Delta s = 2\pi f \frac{ds}{d\sigma} \Delta \sigma = 2\pi f \lambda \Delta \sigma. \quad (4.9)$$

Ennek megváltozása:

$$\frac{d}{dt} \Delta A = 2\pi (\dot{f} \lambda + f \dot{\lambda}) \Delta \sigma = 2\pi \lambda f \left(\dot{s} \frac{f_s}{f} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \right) \Delta \sigma. \quad (4.10)$$

Tehát a felszín megváltozása fajlagosan

$$\frac{1}{\Delta A} \frac{d}{dt} \Delta A = \dot{s} \frac{f_s}{f} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}. \quad (4.11)$$



4.3. ábra. A hifa egy „gyűrűjének” ΔA felszíne az ábrán színezéssel jelölve.

Ez a mennyiség persze függ attól, hogy milyen messze vagyunk a hifa csúcsától, tehát s -től. Erre szeretnénk valamilyen biológiailag elfogadható feltevést adni.

Megfigyelték (Gray *et al.*, 1990; Trinci és Saunders, 1977), hogy a hifa növekedése a csúcs közelében a leggyorsabb, és onnan távolodva a növekedés üteme egyre lassul. Észrevehető, hogy a csúcst geometriailag az jelöli ki, hogy itt a legnagyobb a görbülete a hifának. Mondható tehát, hogy a hifa egyes pontjaiban a növekedés üteme a görbületnek egy-egy értelmű, monoton függvénye. Ennek a függvénynek a pontos alakja nem ismeretes, ezért mi a legegyszerűbb feltevés mellett vezetünk le egy hifa-alakot. Legyen ez a feltevés az, hogy a fajlagos felületnövekedés arányos a görbe adott pontbeli szorzatgörbületével, vagyis a hifafelület főgörbületeinek szorzatával:

$$\frac{1}{\Delta A} \frac{d}{dt} \Delta A = ck_1k_2, \quad (4.12)$$

ahol k_1 a meridián irányban vett görbület, k_2 az azimutális irányban vett görbület, c pedig egy arányossági tényező. A meridiángörbület számítható a $\partial t / \partial s = -k_1 n$ összefüggést n -nel szorozva:

$$k_1 = f_{ss}g_s - g_{ss}f_s. \quad (4.13)$$

Kihasználva, hogy (4.6) ívhossz szerinti deriváltja alapján $g_{ss} = -f_s f_{ss} / g_s$, adódik, hogy

$$k_1 = \frac{f_{ss}}{g_s}. \quad (4.14)$$

A k_2 azimutgörbület a 4.2 ábra alapján számítható. Az ábrán az R távolság a görbe normálvektorának egyenesén mérve a vizsgált pont és a hifa tengelyének távolsága. Az R távolság az $f = -Rn$ egyenletből számítható, ahol i az x irányú egységvektor. Mivel $k_2 = 1/R$:

$$k_2 = -\frac{g_s}{f}. \quad (4.15)$$

A görbületek ismeretében számítható a $G(s) = k_1k_2$ szorzatgörbület, majd (4.11) és (4.12) alapján kapjuk, hogy

$$\dot{s} \frac{f_s}{f} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -c \frac{f_{ss}}{f}. \quad (4.16)$$

A (4.8) egyenlet alapján ide $\dot{s} = -u_0 g_s$ és

$$\dot{\lambda} = \frac{d}{dt} \frac{ds}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma} \dot{s} = -u_0 g_{ss} \lambda \quad (4.17)$$

behelyettesítésével

$$-u_0 g_s \frac{f_s}{f} - u_0 g_{ss} = -c \frac{f_{ss}}{f} \quad (4.18)$$

adódik, ami egyszerűsítve

$$g_s f_s + g_{ss} f = \frac{c}{u_0} f_{ss} \quad (4.19)$$

alakba írható. Ez s szerint integrálható:

$$g_s f = \frac{c}{u_0} f_s + c_1, \quad (4.20)$$

ahol c_1 integrálási állandó. Mivel a hifa csúcsánál az érintő x irányú, ezért $s = 0$ esetén $f_s(0) = 1$ és $g_s(0) = 0$, valamint $f(0) = 0$, ezért adódik, hogy $c_1 = -c/u_0$. Vagyis egyenletünk

$$g_s f = \frac{c}{u_0} (f_s - 1) \quad (4.21)$$

alakba írható.

Szeretnénk ezt az egyenletet olyan alakba írni, amiből közvetlenül számítható a hifa kontúrjának $g(f)$ alakja. Képezzük a keresett alak deriváltját:

$$g' \equiv \frac{dg}{df} = \frac{dg}{ds} \frac{ds}{df} = \frac{g_s}{f_s}, \quad (4.22)$$

amiből

$$g_s = f_s g' \quad (4.23)$$

következik. Behelyettesítve ezt (4.6) egyenletbe, kapjuk, hogy

$$f_s = \frac{1}{\sqrt{1 + g'^2}} \quad (4.24)$$

Behelyettesítve (4.23) és (4.24) összefüggéseket (4.21) egyenletbe kapjuk, hogy

$$f g' = \frac{c}{u_0} \frac{1}{\sqrt{1 + g'^2}} - \frac{c}{u_0}. \quad (4.25)$$

Innen kifejezhető g' :

$$g' = -\frac{2 \frac{c}{u_0} f}{\frac{c^2}{u_0^2} - f^2}. \quad (4.26)$$

Ez az egyenlet integrálható, és megkapjuk a hifa alakját:

$$g(f) = \frac{c}{u_0} \ln \left(\frac{c^2}{u_0^2} - f^2 \right) + c_2, \quad (4.27)$$

ahol c_2 újabb integrálási állandó. Ha a koordináta-rendszerünket úgy rögzítjük, hogy $f = 0$ esetén $g = 0$ legyen, akkor $A = -(c/u_0) \ln(c^2/u_0^2)$, és ekkor

$$g(f) = \frac{c}{u_0} \ln \left(1 - \frac{u_0^2}{c^2} f^2 \right). \quad (4.28)$$

Az alak egyetlen paramétere a c/u_0 hányados. Ez kifejezhető a hifa r sugarával. A hifa a csúcs-tól távol, vagyis ahol $g \rightarrow \infty$, r sugarú, vagyis $f \rightarrow r$. Ezt a peremfeltételt behelyettesítve (4.28) egyenletbe, azt kapjuk, hogy $c/u_0 = r$. Vagyis a hifa kontúrját leíró egyenlet

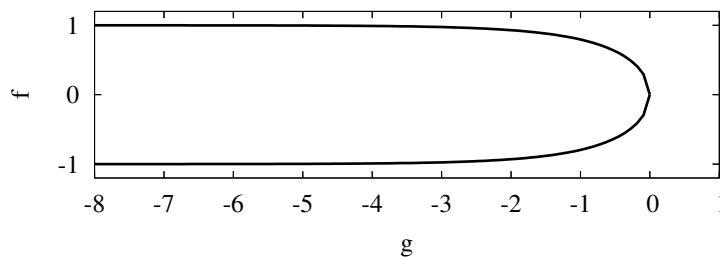
$$g(f) = r \ln \left(1 - \frac{f^2}{r^2} \right). \quad (4.29)$$

Ha ezt az alakot dimenziótlanságban írjuk fel, vagyis az f és g távolságokat r egységekben mérjük egy $f \rightarrow rf$ és $g \rightarrow rg$ változócseré segítségével, akkor látható, hogy minden hifa lényegében azonos alakú:

$$g = \ln(1 - f^2). \quad (4.30)$$

Természetesen ez feltételezi, hogy igaz volt az az egyszerűsítő feltevésünk, hogy a fajlagos felületnövekedés arányos a szorzatgörbülettel. Amennyiben sikerülne a jelenleg létező méréseknél pontosabban meghatározni a hifa alakját, akkor eldönthető lenne, hogy feltevésünk helyes-e, vagy nem. Ennek hiányában azt lehet kijelenteni, hogy (4.6), (4.7) és (4.8) egyenletek bármilyen növekedő hifa alakját leírják, azon kellő pontossággal ismert biológiai megfigyeléseken alapulva, hogy a hifa alakja nem változik a növekedés során, és a hifa felületi pontjai csak a felületre merőlegesen mozognak el a növekedés során. Ezen általános egyenletek felhasználásával, ha a hifa tényleges növekedésének biológiai részleteiről sikerülne többet megtudni, akkor (4.12) egyenlet kicserélésével megkapható volna a hifa tényleges alakja.

Mindazonáltal (4.12) feltevésünk nem lehet messze a valóságtól, hiszen a (4.29) egyenletünk a reálishoz igen közeli alakot szolgáltat. Az egyenlet által szolgáltatott alakot a 4.4 ábra mutatja.



4.4. ábra. Egy $r = 1$ sugarú hifa alakja (4.29) egyenlet szerint.

A kapott eredmények alapján kimondható a következő tézis:

6. tézis. Szálak baktériumok és gombafonalak növekedési jellemzőire kinematikai modellt dolgoztam ki. A baktériumok illetve gombafonalak hosszmetészetének kontúrját növekedésre képes

szálnak tekintve felírtam az általános kompatibilitási egyenleteket. A szálas baktériumok és gombafonalak alakját jól közelítő megoldás adódott egy heurisztikus biológiai feltevessel, miszerint a növekedés a görbülettel arányos.

4.2. Kolónianövekedés és időben változó fraktálok

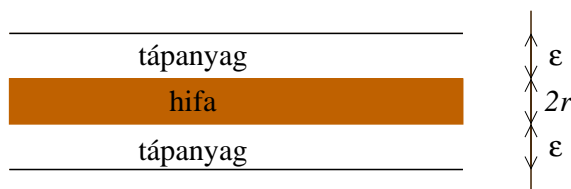
Ez az alfejezet Károlyi (2004, 2005) cikkei alapján készült.

Egyetlen szál növekedésének modellezése után most térjünk rá a teljes mikroorganizmus-kolónia növekedésének vizsgálatára! A megfigyelések azt mutatják, hogy az életciklus kezdetén a telep egy kicsiny spórából indul ki, míg a későbbi fázisban a telep közepe nagyjából térkitöltő lesz. A szálak vastagságánál nagyobb skálán kezdetben, mikor még csak az első szál (úgynevezett *csíracső*) kezdett el növekedni, a kolónia fraktáldimenziója 1, a végső dimenzió pedig 2 vagy 3 attól függően, hogy a növekedés egy felületen két dimenzióban, vagy pl. folyékony közegben három dimenzióban zajlik. Az egyszerűség kedvéért most csak a felületen növekedő, síkbeli modellt mutatjuk be, de semmivel sem bonyolultabb a térbeli modell, és az eredmények is teljesen hasonlóak.

Vizsgáljuk a telep egy rögzített \mathcal{A} részét a kezdeti spóraállapot körül! Legyen ennek a tartománynak a lineáris mérete (ℓ_0) jóval nagyobb, mint a szálak sugara (r): $r \ll \ell_0$. A vizsgált \mathcal{A} tartomány területe tehát $A_0 = \ell_0^2$. Ebben a tartományban kezdetben csak egy szál, hifa van, ami nő, majd elágazik, és fokozatosan betölti az \mathcal{A} tartományt. Feltesszük, hogy a tartományba kívülről érkező szálak mennyisége nagyjából azonos a tartományból kimenő szálakkal, vagyis a biomassa növekmény \mathcal{A} -ban csak a tartományon belüli növekedésből származik. A növekedés kezdete után t idővel a teljes hifahossz legyen $\mathcal{L}(t)$. A hifa a hossza mentén egy ε széles sávból veszi fel a tápanyagot valamely rövid Δt idő alatt. Ekkor a 4.5 ábra szerint a tápanyag egy 2ε széles sávból származik vagyis az elfogyasztott tápanyag mennyisége (tömege) Δt idő alatt

$$m_e = \mathcal{L} 2\varepsilon \varrho(D). \quad (4.31)$$

Itt $\varrho(D)$ a tápanyag átlagos sűrűsége \mathcal{A} tartományban. Feltettük, hogy ez függ a kolónia pillanatnyi D fraktáldimenziójától: minél több fonal van jelen, annál kevesebb tápanyag maradt. Vagyis D tulajdonképpen a kolónia sűrűségét méri.



4.5. ábra. A tápanyagfelvétel vázlata. A $2r$ átmérőjű szál az ε széles sávokból veszi fel a tápanyagot Δt idő alatt.

Az elfogyasztott táplálék egy része a telep önfenntartására fordítódik, más része a növekedést szolgálja. Jelölje γm_e a növekedésre fordított részt, akkor $(1 - \gamma)m_e$ az alap-metabolizmus

fenntartására és veszteségekre fordítódik. Feltételezve, hogy a fonalak átlagos sűrűsége ϱ_f , a fonalak által lefedett terület $\gamma m_e / \varrho_f$ -fel nő. Ha a fonalak sugara r , a hossz növekedése Δt idő alatt

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{\gamma m_e}{\varrho_f 2r} = \gamma \varepsilon \frac{\varrho(D)}{\varrho_f} \frac{\mathcal{L}}{r}. \quad (4.32)$$

Mindkét oldalt elosztva Δt -vel, és véve a $\Delta t \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ határesetet, miközben $v_R = \lim_{\Delta t \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon / \Delta t$ véges marad, a fonalak \mathcal{A} -beli hosszára a következő egyenletet kapjuk:

$$\dot{\mathcal{L}} = \gamma v_R \frac{\varrho(D)}{\varrho_f} \frac{\mathcal{L}}{r}. \quad (4.33)$$

Ez az egyenlet önmagában még nem oldható meg, $\mathcal{L}(t)$ -n kívül ismeretlen benne $\varrho(D)$, ahol D még az \mathcal{L} hossz, és így a t idő függvénye.

A Δt idő alatt a tápanyag mennyisége \mathcal{A} -n belül $-m_e$ -vel változik. Így az átlagos tápanyag-koncentrációra igaz a következő:

$$\dot{\varrho}(D) = - \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \frac{m_e}{A_0} = - \frac{\mathcal{L} 2 v_R \varrho(D)}{A_0}. \quad (4.34)$$

A fonalak \mathcal{A} -ban fraktált alkotnak az r oldalméretnél nagyobb dobozokkal mérve, ahogy azt Obert *et al.* (1990); Patankar *et al.* (1993); Boddy *et al.* (1999) megfigyelték, és Patankar *et al.* (1993); Lejeune és Baron (1997) tapasztalták numerikus szimulációkban. Mi is meghatároztuk az 1.7 ábrán látható telep fraktáldimenzióját. A 4.6 ábra mutatja a lefedéshez szükséges dobozok $N(\epsilon)$ számát a lefedő dobozok ϵ oldalhosszának függvényében log-log skálán. Látható, hogy az 1.7 ábra negyedének megfelelő dobozméretnél kisebb, de a fonalak átmérőjénél nagyobb dobozok esetén az ábrázolt görbe meredeksége -1.73 , vagyis a pillanatnyi fraktáldimenzió $D \approx 1.73$. Ennél nagyobb dobozok alkalmazásával a finomszerkezet elvész, és a görbe meredeksége -2 .

A fonalak hossza becsülhető a dobozok számának segítségével: $\mathcal{L} \approx \epsilon N(\epsilon)$. A D dimenziós fraktál esetén, ahogy már a Bevezetésben is említettük, $N(\epsilon) = \mathcal{H}(\epsilon/\ell_0)^{-D}$ (Mandelbrot, 1977; Tél, 1988; Falconer, 1990). Itt \mathcal{H} egy arányossági állandó, a Hausdorff-térfogat, míg ℓ_0 dimenzionális okokból bukkant fel. Az $\epsilon = r$ választással (ennél kisebb ϵ nem lehet, mert nem érvényesülne a fraktálskálázás):

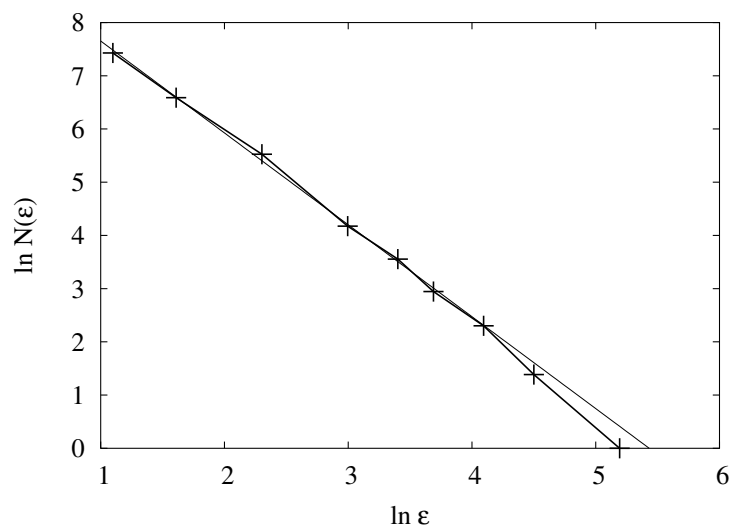
$$\mathcal{L} = \mathcal{H} r^{1-D} \ell_0^D. \quad (4.35)$$

Itt a jobb oldalon csak D függ az időtől, tehát a kolónia sűrűségétől. Az egyenlet időderiváltját behelyettesítve (4.33) egyenletbe kapjuk:

$$\dot{D} = \frac{\gamma v_R \varrho(D)}{r \varrho_f \ln \zeta}, \quad (4.36)$$

ahol

$$\zeta = \frac{\ell_0}{r} \gg 1 \quad (4.37)$$



4.6. ábra. Az 1.7 ábra fraktáldimenziójának mérése. Vízszintes tengelyen az alkalmazott dobozok oldalhosszáinak logaritmusai láthatók (az 1.7 ábra oldalélét véve egységnek), a függőleges tengelyen pedig a lefedéshez szükséges dobozszám logaritmusai szerepelnek. A vékony vonallal rajzolt egyenes meredeksége -1.73 , ez adja meg a $D \approx 1.73$ pillanatnyi fraktáldimenziót. Az $\ln \epsilon > 4$ értékek esetén a meredekség megváltozik, ennél nagyobb dobozok esetén a finom részletek elvesznek, és a dimenzió 2. Az ábrán látható legkisebb mért ϵ éppen csak nagyobb a szálak átmérőjénél, ennél kisebb ϵ esetén nem látszik a fraktálszerkezet.

az \mathcal{A} tartomány oldalhosszának a mérete a fonalak sugarához képest. Összehasonlítva (4.36) és (4.34) egyenleteket, kihasználva $\dot{\varrho}(D) = \dot{D} d\varrho(D)/dD$ és (4.35) összefüggéseket, a következő differenciálegyenletet kapjuk $\varrho(D)$ -re:

$$\frac{d\varrho(D)}{dD} = -\frac{2\mathcal{H}\varrho_f \ln \zeta}{\gamma} \zeta^{D-2}. \quad (4.38)$$

Használjuk ki, hogy kezdetben egy fonál van csak, amelynek a dimenziója 1, vagyis $t = 0$ -kor $D(0) = 1$. Ha ekkor a tápanyag sűrűsége ϱ_0 volt, és integráljuk (4.38) egyenletet, kapjuk, hogy

$$\varrho(D) = \varrho_0 + \frac{2\mathcal{H}\varrho_f}{\gamma\zeta^2} (\zeta - \zeta^D). \quad (4.39)$$

Kihasználva ezt az eredményt, (4.36) egy differenciálegyenletet ad $D(t)$ -re, amit $D(0) = 1$ kezdőfeltétellel megoldva adódik:

$$D(t) = \frac{1}{\ln \zeta} \ln \left(\frac{2\zeta\mathcal{H}\varrho_f + \zeta^2\gamma\varrho_0}{2\mathcal{H}\varrho_f + \zeta\gamma\varrho_0 \exp \left[-\frac{v_R}{r} \left(\frac{2\mathcal{H}}{\zeta} + \frac{\gamma\varrho_0}{\varrho_f} \right) t \right]} \right). \quad (4.40)$$

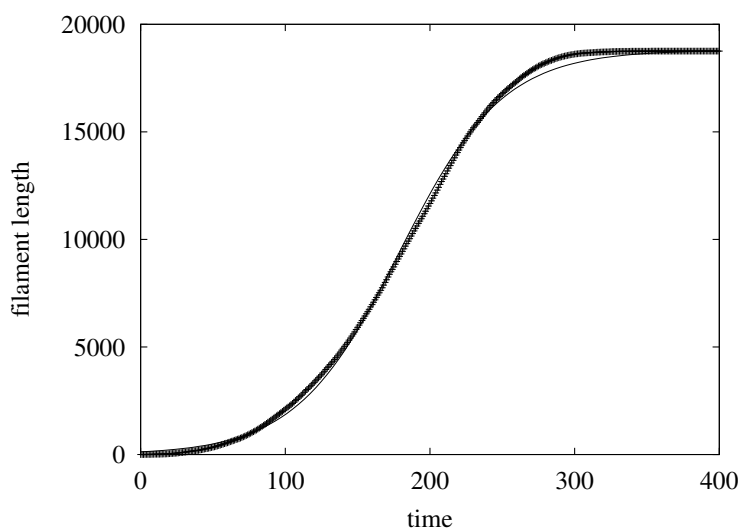
Ez az egyenlet mutatja meg, hogyan változik időben a fraktáldimenzió az \mathcal{A} tartományban. Vegyük észre, hogy az időfüggés csak a logaritmus alatti exponensben szerepel, a többi mennyiség időben állandó!

Kihasználva megint (4.35) képletet, a szálak teljes hossza, és így a teljes biomassa az \mathcal{A} tartományban, könnyen számítható:

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{H}r \frac{2\zeta\mathcal{H}\varrho_f + \zeta^2\gamma\varrho_0}{2\mathcal{H}\varrho_f + \zeta\gamma\varrho_0 \exp \left[-\frac{v_R}{r} \left(\frac{2\mathcal{H}}{\zeta} + \frac{\gamma\varrho_0}{\varrho_f} \right) t \right]} \quad (4.41)$$

Az $\mathcal{L}(t)$ teljes hifa hossz közvetlenül mérhető akár kísérletben, akár számítógépes szimulációkban.

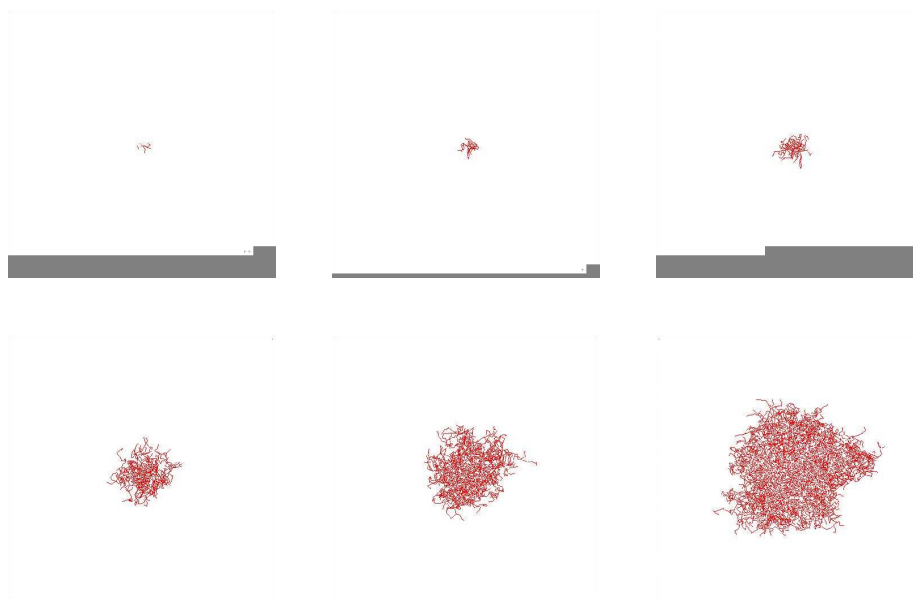
A kapott $\mathcal{L}(t)$ függvényalak nagyon hasonlít a biomassa növekedésére korábban mérésekben kapott görbékre (Ikasari és Mitchell, 2000; Trinci, 1971; Georgiou és Shuler, 1986). Ahogy azt kísérletekben tapasztalták (Saunders és Trinci, 1979; Prosser és Trinci, 1979), a teljes biomassa növekedése kezdetben lineáris. Ezt (4.41) egyenlet tartalmazza: mivel $\zeta \gg 1$, ezért $2\mathcal{H}\varrho_f \ll \zeta\gamma\varrho_0$, és kis t esetén az exponenciális függvény linearizálható, ami kezdeti lineáris növekedést ad. Ezt követi az exponenciális szakasz: a nevezőben még az exponenciális függvény dominál, de már nem linearizálható az idő szerint. Az idő múlásával inflexiós pontot érünk el (4.7 ábra): az exponenciális növekedés lassul, a nevezőben nem hagyható el a konstans tag sem. Végül a növekedés leáll, ahogy a tápanyag elfogy a vizsgált tartományban. Ez a szakasz is automatikusan következik nagy t esetén (4.41) képletből. Mindez azt jelenti, hogy (4.41) egyenletünk által leírt növekedés tartalmazza a telep valamennyi megfigyelt növekedési szakaszát. Vegyük észre azt is, hogy a képletben szereplő mennyiségek mind mérhető vagy becsülhető. A kezdeti tápanyagsűrűség (ϱ_0), a szálak átlagos sűrűsége (ϱ_f), a növekedésre fordított tápanyaghányad (γ), a tápanyagfelvétel sebessége (v_R), a szálak sugara (r) függenek a



4.7. ábra. A teljes hifa hossz összehasonlítása számítógépes szimulációban (vastag vonal) és (4.41) egyenlet alapján (vékony vonal). Az egyezés meglehetősen jó, annak ellenére, hogy a numerikus szimuláció teljesen független a levezetett képlettől.

vizsgált fajtól, és mind mérhető. Emellett szerepel még a \mathcal{H} állandó, amely becsülhető, nagyságrendje egységnyi, míg ζ az általunk választott megfigyelési tartomány méretét írja le. A paraméterek mérhető volta miatt (4.41) egyenlet érvényessége könnyen ellenőrizhető.

A teljes hossz változására levezetett (4.41) képletünket *számítógépes szimulációban* ellenőriztük. A szimuláció egy spórából indul, amiből véletlenszerűen választott irányba, véletlenszerű hosszal megnő az első hifa. Az irányt véletlenszerűen választjuk 18 lehetséges irányból, a hifa hossza egyenletes valószínűséggel esik egy adott intervallumba. Ezután a hifa kis valószínűséggel elágazik: egy új hifa keletkezik valahol az eredeti mentén. Ezután minden hifa választ véletlenszerűen egy új irányt a 18 lehetségesből. Az irányok nem egyforma valószínűek: legnagyobb kezdeti valószínűsége az eredeti iránynak van, a többinek lineárisan egyre kevesebb, a teljes visszafordulásnak nulla az esélye. Ezek a kezdeti valószínűségek még módosulnak az egyes irányokban található hifa sűrűségének megfelelően: minél nagyobb az egyes irányokban a hifa sűrűsége, az arrafelé kanyarodás valószínűsége annál kisebb lesz. Ha túl sok hifa van valamilyen irányban, akkor arra nem lehet kanyarodni; ha minden irányban túl nagy a sűrűség, akkor az adott szál növekedése leáll. Ez modellezi, hogy a tápanyag elfogy azokon a területeken, ahol nagy a hifa sűrűség, és ezeket a részeket el „akarja” kerülni minden növekedő ág. Az így meghatározott valószínűségek alapján választunk egy új növekedési irányt minden szálnak, és aztán ebbe az irányba növekszik e hifa egy véletlen hosszal, amely hosszat egy adott intervallumból egyenletes valószínűség alapján választunk. Ezután a még növekvő ágak újra elágazhatnak, majd a növekedés-elágazás folyamat ismétlődik. Hamarosan a teljes tartományt sűrűn behálózzák a fonalak, és egy elágazásos véletlen bolyongás modellt kapunk, amelyben az „útvonalak” kereszteződéseit korlátoztuk. Ha a maximális fonalsűrűség egységnyi, akkor egy olyan elágazásos véletlen bolyongást kapunk modellünkben, amely soha nem tér vissza oda,



4.8. ábra. Pillanatfelvételek a növekvő kolóniáról a számítógépes szimulációban, 5, 15, 25, 45, 65, illetve 95 időegységgel (növés-elágazás ciklus) a kezdés után.

ahol egyszer már járt.

A 4.8 ábra a szimulációban nyert telep időbeli fejlődését mutatja. A kezdeti spóra végül bonyolult micéliumot alkot, a szálak kitöltik a vizsgált tartomány nagy részét. Összehasonlításképpen, az 1.7 ábra egy valódi *Streptomyces coelicolor* kolónia fényképét mutatja, a hasonlóság igazolja modellünk életszerűségét. Hasonló, a bemutatottnál összetettebb modellt már használtak szálas mikroorganizmusok leírására (Lejeune és Baron, 1997).

Könnyen mérhető a 4.8 ábrán mutatott szimuláció esetében a szálak teljes hossza. Ennek időfüggését a 4.7 ábra mutatja, a (4.41) képlet által megadott görbével együtt. A két görbe jó egyezést mutat, vagyis a levezetett (4.41) egyenlet, a feltevések egyszerűsége ellenére is meglehetősen jó eredményeket ad. A 4.7 ábrán ábrázolt, (4.41) képletben alapuló görbe a valódi telepek esetében kapott görbékkel (Trinci, 1971; Georgiou és Shuler, 1986; Ikasari és Mitchell, 2000) is kitűnő kvalitatív egyezést mutat.

Összefoglalva, ebben az alfejezetben egy egyszerű modellt dolgoztunk ki a fonalas mikroorganizmusok növekedésének modellezésére. A modell alapeleme az időben változó fraktalitás. A fraktáldimenzió időbeli változása mellett azt kellett még figyelembe venni, hogy bár a tápanyagfelvétel végig a fonalak mentén zajlik, maga a növekedés csak a fonalak végein történik. Az eredmény a kolónia valamennyi növekedési fázisát leíró analitikus modell. A modell segítségével jóslat adható arra is, hogy mikor válik „felnőtté” a telep, mikor lehet az antibiotikum „szüret” optimális időpontja. Továbbá, megismerve egyes hozzáadott kemikáliák hatását a növekedés paramétereire (pl. a v_R tápanyagfelvételi rátára) megtervezhetővé válik a kolónia növekedési üteme. Mindezen szempontok hasznossá tehetik modellünket antibiotikumok ipari előállítására kapcsán is.

Mindezek alapján kimondható a dolgozat 7. tézise:

7. tézis. Szálakból álló gombatelepek és baktériumkolóniák növekedésének mechanikai modelljét sikerült levezetni, amely a telep fraktáldimenziójának időbeli változásán alapul. A kolónia teljes tömegére és a fraktáldimenzió időfüggésére egy csatolt egyenlet adódott, amelynek megoldása jól közelíti a valós mérésekből és a saját numerikus szimulációimból nyert eredményeket.

4.3. Kémiai reakciók zárt áramlásban

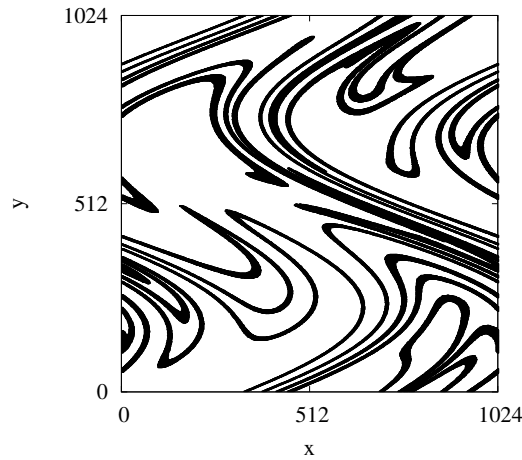
Ez az alfejezet Károlyi és Tél (2005) cikke alapján készült.

Időben változó fraktáldimenzióval jellemezhető szálas struktúrákkal nemcsak a mikroorganizmus-telepek esetében találkozhatunk. Láttuk, hogy *nyitott* áramlásban sodródó részecskék egy *állandó* fraktáldimenzióval rendelkező szálas struktúrát, az instabil sokaságot rajzolnak ki. A Bevezetésben már utaltunk rá, hogy *zárt* áramlásokban a szálas szerkezet hamarosan betölti a teljes tartályt, és eközben a sodródó részecskék is egyre homogénebb módon keverednek el. Tehát biztosan nincs egy állandó fraktáldimenzióval jellemezhető alakzat, amelyen a részecskék gyülekeznenek. Egy méréseken alapuló szimuláció során (Wonhas és Vassilicos, 2002) találtak már zárt áramlásban fraktálszerkezetet, amely *időben változó* volt, de erősen vitatható, hogy valóban fraktáldimenzió volt-e, amit mértek. Biztosan nincs zárt áramlásokban olyan invariáns halmaz, instabil sokaság, amelynek jól definiált fraktáldimenziója lenne, vagyis amelynél a lefedéshez használt dobozok száma (1.4) szerint skálázna a dobozok méretével. Zárt áramlásokban a tartomány *instabil foliációja* térkitöltő (Tél és Gruiz, 2002), vagyis dimenziója megegyezik a tartományéval, kétdimenziós áramlásban 2. Ennek ellenére, ahogy azt hamarosan bemutatjuk, lehetséges egy fraktáldimenzióhoz hasonló D_{eff} *időfüggő effektív dimenzió* bevezetése, amelynek segítségével viszonylag egyszerűen vizsgálható a zárt áramlásokban zajló keveredés, illetve a zárt áramlásokban zajló kémiai aktivitás is.

Ha egy csepp, vagyis kezdőfeltételek egy halmaza kaotikusan sodródik zárt áramlásban, akkor a csepp elkezd kiöltöni a térkitöltő szálas egy részét, majd idővel a teljes tartományt sűrűn kitölti a szálas mentén. Erre egy példát a 4.9 ábra mutat. A szálasság *tranzien*s zárt áramlásban, miközben a kaotikus viselkedés *permanens*. Ez pont fordítva van, mint a korábban vizsgált nyitott áramlás esetében, ahol a kaotikus viselkedés a kisodródás miatt *tranzien*s volt, de a fraktálszálas *permanens* mintázatot alkottak. Ebben az alfejezetben azt vizsgáljuk, hogy egy egyszerű autokatalitikus reakció, amelyenről már a 3.2 alfejezetben is szó volt, milyen módon zajlik le zárt áramlásban.

Vizsgáljuk meg először is egy szál viselkedését! Most is igaz, hogy a kaotikus sodródás nyújtó hatása miatt a szálas irányában homogén lesz az áramlás, a részecskék eloszlása a szálsakra merőlegesen lesz érdekes. A kaotikus dinamika, csakúgy, mint a nyitott áramlás esetében, a szálas környékén mindent a szálak felé „nyom össze”. A diffúzió és az autokatalitikus reakciók hatása is ugyanaz. Használható tehát most is a 3.2 alfejezetben alkalmazott modell, a (3.11) egyenlet, illetve annak egyszerűsített változata, (3.14). Az egyszerűbb tárgyalás kedvéért vezessünk be dimenziótlan egységeket! Ha L a tartomány jellemző mérete, akkor jellemezzük a sáv szélességet a dimenziótlan $d = \delta/L$ mennyiséggel, ekkor (3.14) így írható:

$$\dot{d} = -\sigma d + 2v_R/L. \quad (4.42)$$



4.9. ábra. Autokatalitikusan aktív anyag (fekete) eloszlása időben és térben szinuszosan változó nyíróáramlásban (Pierrehumbert, 1994). A szimuláció egy 1024×1024 méretű rácson történt. Az áramlás Ljapunov-exponense $\sigma \approx 0.61 \pm 0.02$. A kép az áramlás nyolcadik időperiódusa után készült.

Csakúgy, mint a nyitott áramlások esetében, most is van egy stabil egyensúlyi szálvastagság, ahol $\dot{d} = 0$:

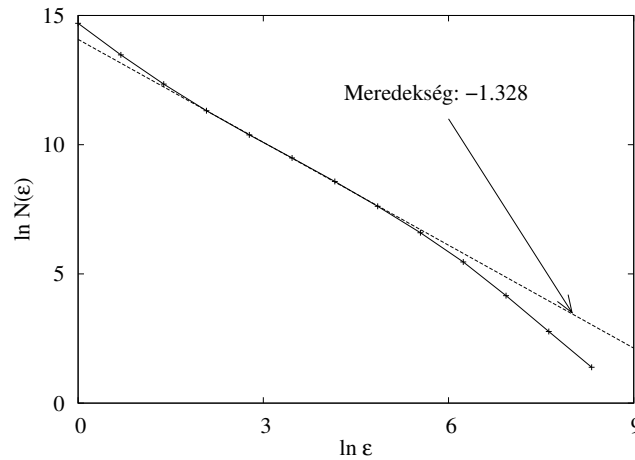
$$d^* = \frac{2v_R}{L\sigma}. \quad (4.43)$$

Most is igaz, hogy nemcsak egy szál van, hanem a reaktív anyag által elfoglalt szálaknak egy struktúrája. Ráadásul a szálak \mathcal{L} hossza növekszik az időben, kezdetben a σ Ljapunov-exponenssel jellemzett exponenciális ütemben. Kétdimenziós, összenyomhatatlan áramlásban ez a tágulást jellemző, és a (3.14) egyenletben szereplő, összehúzódást jellemző Ljapunov-exponens azonos. A reakciók jelenléte miatt a szálak nem lesznek tetszőlegesen vékonyak, és mivel a tartály zárt, így a hosszuk sem lehet tetszőlegesen hosszú. Az exponenciális nyúlásnak határt szab, hogy a véges $\delta(t)$ sáv szélesség miatt a zárt tartomány teljesen betöltődik. Ha a tartomány területe $\mathcal{H}L^2$, ahol most \mathcal{H} egy geometriai faktor (pl. kör alakú tartály esetén, ha L a kör sugara, $\mathcal{H} = \pi$), akkor a teljes betöltöttséghez tartozó hossz $\mathcal{L}^* = \mathcal{H}L^2/\delta^*$, ahol δ^* a kialakuló átlagos szálvastagság. Ha bevezetjük a hossz mérésére is az $\ell = \mathcal{L}/L$ mennyiséget, akkor $\ell^* = \mathcal{H}/d^*$. A hosszának a teljesen betöltött állapothoz közeledését a következő egyszerű, de általános alakkal vesszük figyelembe:

$$\dot{\ell} = \sigma \ell \left(1 - f\left(\frac{\ell d^*}{\mathcal{H}}\right) \right), \quad (4.44)$$

ahol $f(\mathcal{L}/\mathcal{L}^*) > 0$ egy tetszőleges függvény, amelyre előírjuk, hogy $f(0) = 0$ és $f(1) = 1$ legyen. Ez biztosítja, hogy a sodródás kezdetén, mikor még kevés szál van, a növekedés exponenciális, de később lelassul.

Ahogy már említettük, nem várható, hogy a 4.9 ábrához hasonló, zárt áramlásban kapott struktúrák igazi fraktálok legyenek. Valóban, ha a lefedéshez szükséges dobozok számát ábrá-



4.10. ábra. A 4.9 ábrán mutatott eloszlást lefedve ε oldalú dobozokkal, a lefedéshez szükséges dobozok száma $N(\varepsilon)$ log-log skálán. Igazi fraktálnál egy egyenest kapnánk. A szaggatott vonal a mért görbe érintőjét közelíti a 4.9 ábrán mutatott szálvastagságnak megfelelő ε -nál. Ennek meredeksége adja meg az effektív dimenziót.

zoljuk a dobozok méretének függvényében log-log skálán, ahogy azt a 4.10 ábrán mutatjuk, akkor nem egyenest kapunk, mint ahogy egy fraktál esetén (1.4) alapján várnánk. Ennek ellenére bevezetjük az *időfüggő effektív dimenziót* a következő definícióval: válasszuk meg $D_{\text{eff}}(t)$ -t úgy, hogy a reaktív, sodródó anyag pillanatnyi eloszlásának lefedéséhez éppen $N(d) = \mathcal{H}d(t)^{-D_{\text{eff}}(t)}$ doboz kelljen. Másképpen mondva, a $D_{\text{eff}}(t)$ effektív dimenzió a dobozsám–dobozméret log-log grafikonjának meredeksége az aktuális $d(t)$ szálvastagságnak megfelelő ε dobozméretnél, ahogy azt a 4.10 ábra mutatja egy példán.

Az effektív dimenzió segítségével felírható, hogy a szálak hossza

$$\ell(t) = d(t)N(d) = \mathcal{H}d(t)^{1-D_{\text{eff}}(t)}. \quad (4.45)$$

A lefedett terület, vagyis a reaktív anyag mennyisége, $C(t) = \mathcal{L}\delta$. Ezt is mérhetjük dimenziótlán egységekben, ekkor a dimenziótlán átlagos koncentrációt kapjuk: $c(t) = C(t)/(\mathcal{H}L^2)$. Erre (4.45) alapján teljesül, hogy

$$c(t) = d(t)\ell(t)/\mathcal{H} = d(t)^{2-D_{\text{eff}}(t)}. \quad (4.46)$$

Vegyük itt a bal oldali egyenlőség idő szerinti deriváltját, majd használjuk ki (4.42) és (4.44) egyenlőségeket! Ekkor:

$$\dot{c} = -c\sigma f(c^{-\beta}d^*) + \frac{2v_R}{L}c^{-\beta}, \quad (4.47)$$

ahol

$$\beta(t) = \frac{D_{\text{eff}} - 1}{2 - D_{\text{eff}}}. \quad (4.48)$$

Vegyük észre, hogy a nyitott áramlásokhoz hasonlóan, most is egy negatív kitevő $(-\beta)$ bukkant fel a kémiai egyenletben! Vegyük most (4.46) jobboldali egyenlőségének idő szerinti deriváltját! Alkalmazva (4.42), (4.47) és (4.48) egyenleteket, a következő összefüggés adódik:

$$\dot{\beta} = \frac{\sigma}{\ln c} \left[(1 + \beta)f(c^{-\beta}d^*) - 1 - \beta \frac{2v_R}{L\sigma} c^{-\beta-1} \right]. \quad (4.49)$$

A (4.47) és (4.49) egyenletek egy *csatolt* egyenletrendszernek adnak az autokatalitikus anyag mennyiségére és az effektív dimenzióra. Ennek az egyenletrendszernek a megoldása adja meg az aktív anyag mennyiségét az idő függvényében. Tehát, a nyitott áramlásokhoz hasonlóan, a zárt áramlásokban zajló kémiai folyamatok leírásánál is figyelembe kell venni az áramlás mechanikai tulajdonságait, nem hagyható figyelmen kívül, hogy az áramlás szálas struktúrák mentén rendezi el a sodródó részecskéket.

Vizsgáljuk meg, hogy a reakció kezdetén ($t < 1/\sigma$) hogyan változik az autokatalitikusan aktív anyag mennyisége! Ekkor még nem lép működésbe a (4.44) szerinti telítődés, feltehető, hogy $f = 0$. Ha kezdetben az anyag egy kis sávban helyezkedik el, akkor $D_{\text{eff}}(0) = 1$, vagyis (4.48) alapján $\beta(0) = 0$. Ekkor (4.47) alakja $\dot{c} = 2v_R/L$ lesz, amiből

$$c(t) = c_0 + \frac{2v_R}{L}t \quad (4.50)$$

következik, ahol c_0 a kezdeti anyagmennyiség. Tehát zárt áramlásban kezdetben az anyagmennyiség *lineárisan* nő az idővel, nem exponenciálisan, ahogy azt jól kevert rendszerben, kis c esetén várnánk (3.7) egyenlet alapján.

A végső állapotban a (dimenziótlan) c anyagmennyiség 1-hez tart, és a szálak lefedik a teljes tartományt, ami miatt $D_{\text{eff}} \rightarrow 2$. Közben a szálak szélessége is tart az egyensúlyi értékhez: $d \rightarrow d^* = 2v_R/L\sigma$. Ezen értékek körül sorba lehet fejteni (4.42), (4.47) és (4.49) egyenleteket, és kihasználva, hogy $c^{1+\beta} = d$ és $c^{-\beta}d^* = cd^*/d$, a következő egyenletrendszeret kapjuk:

$$\dot{d} = -\sigma(d - d^*), \quad (4.51)$$

$$\dot{c} = -a\sigma(c - 1) - \frac{\sigma}{d^*}(1 - a)(d - d^*), \quad (4.52)$$

$$\dot{D}_{\text{eff}} = \frac{a\sigma}{\ln d^*}(c - 1) + \frac{\sigma}{d^* \ln d^*}(1 - a)(d - d^*), \quad (4.53)$$

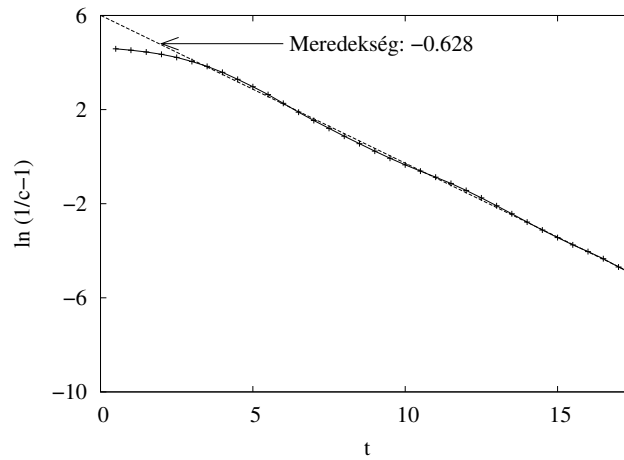
ahol $a = f'(1)$. Észrevehető, hogy az effektív dimenzió csak követi az anyagmennyiség változását ebben a telítődő, végső szakaszban, hiszen $\dot{D}_{\text{eff}} = -\dot{c}/\ln d^*$. Tehát a végső állapothoz való exponenciális közeledést a (4.51) és (4.52) egyenletek Jacobi mátrixának nagyobbik sajátértéke fogja leírni. A sajátértékek: $-a\sigma$ és $-\sigma$, vagyis

$$1 - c \sim e^{-\omega t}, \quad 2 - D_{\text{eff}} \sim e^{-\omega t}, \quad (4.54)$$

ahol

$$\omega = \min\{a\sigma, \sigma\}. \quad (4.55)$$

Ezt az összefüggést numerikus kísérletben ellenőriztük. Az áramlás ugyanaz, mint amit már a 4.9 ábrán mutattunk, tehát a térben és időben periodikus, szinuszos nyíróáramlás (Pierre-humbert, 1994). A 3.2 alfejezetben részletezett módon, az autokatalitikus reakciók lefolyásának követéséhez az áramlási teret, egy négyzetet, négyzetráccsal fedtük le, amely 8192×8192



4.11. ábra. A 4.9 ábrán mutatott, szinuszos nyíróáramlásban az autokatalitikusan aktív anyag c mennyiségének időbeli változása. Az egyenes meredeksége alapján $\omega = 0.628 \pm 0.01$. A t időt az áramlás periódusidejében mértük.

négyszetből állt. A reakciók az áramlás fél periódusidejében történtek, és minden olyan négyzet, amely tartalmazott részecskét, „megfertőzte” a szomszédját. A 4.11 ábrán az autokatalitikusan aktív részecskék számát láthatjuk az idő függvényében. Jól leolvasható, hogy (4.54) összefüggés teljesül, és a mért sajátérték $\omega = 0.628 \pm 0.01$. Hasonló eredményt kapunk, ha az effektív dimenzió időbeli változását vetjük össze (4.54) képlettel, ahogy azt a 4.12 ábra mutatja. Az innen leolvasható $\omega = 0.628 \pm 0.01$ teljesen egybevág a c koncentráció mérésével nyert értékkel, és mivel az áramlásban $\sigma = 0.61 \pm 0.02$ (l. 4.9 ábra), ezért most $\omega \approx \sigma$ megállapítható, összhangban (4.55) kifejezéssel.

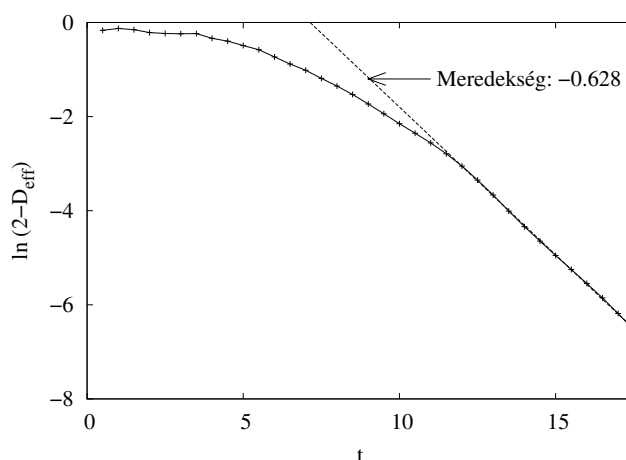
Megvizsgálhatjuk azt is, hogy mi történik, ha csak passzív részecskék sodródnak zárt áramlásban, és nincs kémiai aktivitás. Ekkor vehető $v_R = 0$ és $f = 0$, hiszen ebben az esetben a szálak szélessége zérus lehet, így végtelen hosszúvá válhatnak a szálak, nincs telítődés. Ekkor (4.47) alapján természetesen $\dot{c} \equiv 0$, hiszen nincs, ami az anyagmennyiséget megváltoztatná. Lesz viszont szálasságot jellemző effektív dimenzió: (4.49) alapján $\dot{\beta} = -\sigma / \ln c$, vagyis $\beta(t) = \beta_0 - \sigma t / \ln c$. A (4.48) képlet alapján pedig

$$D_{\text{eff}} = 2 - \frac{2 - D_{\text{eff},0}}{1 - (2 - D_{\text{eff},0})\sigma t / \ln c} \quad (4.56)$$

adódik. Látható, hogy az effektív dimenzió a teljes betöltöttséget jelentő 2 értékhez tart, a kezdeti eloszlást jellemző $D_{\text{eff},0}$ -tól.

A zárt áramlásra érvényes egyenletekből speciális esetként megkapható a nyitott áramlásra levezetett (3.20) reakcióegyenlet is. Ebben az esetben a dimenzió változatlan, vagyis $D_{\text{eff}} \equiv D$, ahol D az instabil sokaság dimenziója. Emiatt $\dot{D}_{\text{eff}} \equiv 0$, és így $\dot{\beta} \equiv 0$. Ekkor (4.49) alapján

$$f = \frac{1 + \beta \frac{2v_R}{L\sigma} c^{-\beta-1}}{1 + \beta}, \quad (4.57)$$



4.12. ábra. A 4.9 ábrán mutatott, szinuszos nyíróáramlásban az autokatalitikusan aktív anyag D_{eff} effektív dimenziójának időbeli változása. Az egyenes meredeksége alapján $\omega = 0.628 \pm 0.01$. Az effektív dimenziót a 4.10 ábrán mutatott módon mértük. A t időt az áramlás periódus-idejében mértük.

amit behelyettesítve (4.47) egyenletbe, kihasználva (4.48) és (3.18) összefüggéseket, közvetlenül megkapható a nyitott áramlás esetében érvényes (3.20) reakcióegyenlet.

Az itt bemutatott levezetések mind az autokatalitikus reakcióra vonatkoztak. Teljesen hasonló eredmények kaphatók azonban más jellegű reakciók esetén is, például sav-bázis típusú ($A + B \rightarrow 2C$) reakciók esetén. Ennek az esetnek a tárgyalása is megtalálható Károlyi és Tél (2005) cikkében, és azt laboratóriumi kísérletekben egy Egyesült Államokbeli kutatócsoport sikeresen ellenőrizte (Arratia és Gollub, 2006).

Mindezek alapján kimondható a dolgozat utolsó tézise:

8. tétel. *Kimutattam, hogy zárt hidrodinamikai áramlásokban a sodródó részecskék egy időben változó dimenzióval leírható, szálas alakzaton gyülekeznek. Ha a sodródó részecskék kémiai reakciókban vesznek részt, akkor az időfüggő szálasságot leíró fraktáldimenzió és az anyagmennyiség egy csatolt differenciálegyenlet-rendszerrel írható le. A kémiai reakciók zárt áramlásokban is erősen függenek az áramlás mechanikai tulajdonságaitól.*

5. fejezet

Az eredmények összefoglalása, tézisek

A dolgozatban szálak struktúrák mechanikai modellezésével foglalkoztunk. Három területet ölelt fel a dolgozat. A kihajló rudak és rúdlánckok esetén maga a vizsgált szerkezet alakja alkotta ezeket a „szálak” struktúrákat. A hidrodinamikai áramlásokban sodródó részecskék az áramlás mechanikai tulajdonságai miatt gyülekeztek szálak struktúrákon. A szálak mikroorganizmusok a táplálék hatékony keresése és minél jobb kiaknázása érdekében nőnek szálak alakba. Megannyi ok tehát a szálak struktúrák felbukkanására.

A kihajló rudak és rúdlánckok vizsgálata során kapcsolatot teremtettünk statikai peremérték-feladatok és kaotikus kezdetiérték-feladatok között. Ez a kapcsolat tette lehetővé, hogy a dinamikai rendszerek elméletéből kölcsönvett eszközök segítségével egyensúlyi helyzetek tulajdonságait vizsgáljuk. Megnéztük, hogy az egyensúlyi helyzetek jellemzésére korábban használt invariánsok vajon kiválthatók-e valamilyen alkalmasabb címkézéssel, ami egyrészt egyértelmű leírását adja a bifurkációs diagram egyensúlyi útjainak, másrészt a klasszikus invariánsok is könnyen megkaphatók belőle. A vizsgálat eredménye, Kapsza *et al.* (2003) cikke alapján, a következő tézis lett:

1. tétel. *Megmutattam, hogy a rugalmas rúdlánckok egyensúlyi helyzeteit leíró, a szimbolikus dinamikával rokon címkézés segítségével egyértelműen meghatározhatóak a hagyományosan az egyensúlyi helyzetek osztályozására használt klasszikus invariánsok: az egyensúlyi helyzetek stabilitása, szimmetriája és zérushelyeinek száma. A szimbolikus dinamikán alapuló címkézés kiválthatja a klasszikus invariánsok alkalmazását. (Közös eredmény Kapsza Enikővel.)*

Tovább vizsgálva a statikai (kihajlási) problémák és a dinamikai rendszerek kapcsolatát, arra voltunk kíváncsiak, hogy hogyan lehet egyszerűen megállapítani, hogy egy statikai probléma mikor jellemezhető a *térbeli káosz* kifejezéssel. Azt szerettük volna, hogy a peremérték-feladat térbeli kaotikus volta és a megfelelő kezdetiérték-feladat kaotikus volta összefüggjön. Viszont problémát jelentett, hogy a peremérték-feladat tartománya *véges*, míg a kaotikus dinamikai rendszereket jellemző paraméterek *végtelen* hosszú időre vannak értelmezve. Végül a megoldások, egyensúlyi helyzetek számának a tartomány hosszától való függése teremtett lehetőséget a térbeli káosz meghatározására. Károlyi (2003); Kocsis és Károlyi (2006) cikkei alapján ezt a következő tézisben lehetett megfogalmazni:

2. tézis. *A dinamikai rendszerek elméletéből ismert topologikus entrópia segítségével egy lehetséges módszert adtam a térbeli káosz felismerésére. A módszer azon alapszik, hogy a vizsgált rendszert leíró peremérték-feladat megoldásainak száma exponenciálisan függ az értelmezési tartomány méretétől térbeli kaotikus rendszer esetén. (Közös eredmény doktoranduszommal, Kocsis Attilával.)*

Mindeddig konzervatív terhek hatására kihajló szerkezetekkel foglalkoztunk. Ezért megvizsgáltuk, hogy nemkonzervatív teher esetén létezik-e, és milyen lesz a megfelelő dinamikai rendszer. Azt tapasztaltuk, hogy a teher nem befolyásolja azt a megfigyelést, hogy a rugalmas rúdláncnak megfelelő dinamikai rendszer minden esetben egy területtartó, konzervatív leképezés lesz. Tehát a korábbi eredmények kiterjeszthetők nemkonzervatív terhek esetére is. Kocsis és Károlyi (2005, 2006) cikkei alapján megfogalmazható tehát a

3. tézis. *Megmutattam, hogy nemcsak a konzervatív erőkkel terhelt rugalmas rúdlánccok esetében lehetséges térbeli káosz, hanem olyan rugalmas rúdlánccok esetében is, amelyekre nemkonzervatív terhek hatnak. A szerkezet egyensúlyi egyenleteinek megfeleltethető kezdetiérték-feladat minden esetben területtartó, konzervatív; és kaotikus volta okozza a szerkezet térbeli kaotikus állapotát. (Közös eredmény doktoranduszommal, Kocsis Attilával.)*

Az egyszerű mechanikai szerkezetek mellett pl. szálas biológiai rendszereket is szoktak rudakkal, illetve rúdlánccal modellezni. A hosszú, sok bázispárból álló DNS molekulákat sokan folytonos rúdként modellezik (Coleman *et al.*, 1995; Lipniacki, 1998, 1999; Tobias *et al.*, 2000; Coleman *et al.*, 2000). Biopolimerek alakját is gyakran modellezik folytonos rúdként, ezeket a modelleket gyakran *féregszerű láncoknak* (wormlike chains) hívják (Kroy és Frey, 1996; Zorski és Infeld, 1997; Samual és Sinha, 2002; Dhar és Chaudhuri, 2002). Máskor hasonló molekulákat diszkrét láncként modelleznek (Micheletti *et al.*, 2001; Mergell *et al.*, 2003; Storm és Nelson, 2003; Coleman *et al.*, 2003; Ådland és Mikkelsen, 2004; Gáspár és Németh, 2004; Olson *et al.*, 2004), például merev elemeket összekötő hajlékony kapcsolatokkal. Növényi (pl. szőlő-) kacsokat vagy indákat is lehet rúdként modellezni, például Goriely és Tabor (1998, 2000); Domokos és Healey (2005) így magyarázta meg a kacsoknál található hélix alak irányultságának spontán megfordulását. Hasonló modelleket javasoltak még szálas baktériumok (Goriely és Tabor, 2000; Goldstein *et al.*, 2000), polipropilén-szálakból készített anyagok gyártása (Holmes *et al.*, 1999), és nanoszálak növesztése (Holmes *et al.*, 2000) esetében.

Ezt követően a dolgozatban rátértünk a hidrodinamikai áramlásokban kialakuló szálas mintázatok vizsgálatára. Először nyitott áramlásokkal foglalkoztunk, és egy egyszerű példán keresztül bemutattuk a nyitott áramlásokban kaotikusan sodródó részecskék viselkedésének sajátosságait. Kiderült, hogy ezek egy szálas fraktálhalmazon gyűlnek össze, ahol sok időt töltenek és ahol (de csak ott!) jól elkeverednek. Ezután megvizsgáltuk, hogy mi történik, ha a sodródó részecskék kémiaiilag aktívak, kémiai reakciókban vesznek részt. Azt tapasztaltuk, hogy a fraktálszerkezetnek meghatározó szerepe van az aktív folyamatban. A nyitott áramlásokban zajló reakciókra levezetett kémiai reakcióegyenlet jelentősen eltér a hagyományos egyenlettől, amely jól kevert anyagok esetén érvényes. Toroczka *et al.* (1998); Károlyi *et al.* (1999); Péntek *et al.* (1999); Tél *et al.* (2000); Károlyi *et al.* (2004); Tél *et al.* (2005) cikkei nyomán kimondható a

4. tézis. *Nyitott hidrodinamikai áramlásokban a részecskék egy bonyolult, szálas fraktálalakzatra gyűlnek össze. Ezen a fraktálalakzaton hosszú időre csapdába esnek a kisodródásuk előtt, így ha a sodródó részecskék kémiai vagy biológiailag aktívak, akkor az aktív folyamatok egy szálas fraktálalakzaton zajlanak. Megmutattam, hogy az áramlás mechanikai tulajdonságai módosítják a hagyományos reakcióegyenletet, az új kémiai egyenletben megjelenik a sodródó részecskék eloszlását jellemző fraktáldimenzió.*

Az új egyenletnek döntő szerepe lehet olyan kémiai reakció esetében, amely áramló közegben zajlik. Az egyik fontos példa az égés (Kiss *et al.*, 2003a,b). További fontos példákat a környezeti áramlások szolgáltatnak. Például a légkörben zajló kémiai folyamatok esetén nem lehet eltekinteni a reagáló anyagok egyenlőtlen, inhomogén eloszlásától; ennek hatalmas jelentősége van az ózonlyuk viselkedésének megértése szempontjából (Edouard *et al.*, 1996a; Solomon, 1999; Grooß *et al.*, 2005). Egy másik példa a planktonpopulációk viselkedése (Abraham, 1998; Abraham *et al.*, 2000; Boyd *et al.*, 2000; Martin, 2003). Éppen ezen a területen sikerült alkalmaznunk eredményünket. Egy régóta fennálló biológiai probléma, a *plankton-paradoxon* (Hutchinson, 1961) egy lehetséges megoldását jelentheti, ha figyelembe vesszük, hogy a planktonra is érvényes az áramlásban a „ritka előnye”, vagyis hogy a szálas fraktálok a kisebb számban jelenlevő faj jobban hozzá tud férni az erőforrásokhoz. A plankton-paradoxon abban áll, hogy a klasszikus tanulmányok, amelyek szerint a jól kevert áramlásban együtt élő fajok száma nem lehet nagyobb, mint a korlátozó erőforrások száma, ellentmondásban áll a tapasztalattal. Ha azonban figyelembe vesszük, hogy az áramlásban sodródó fitoplankton fajok nem keverednek el tökéletesen, akkor Károlyi *et al.* (2000, 2005); Scheuring *et al.* (2000, 2003b) cikkei alapján kimondható az

5. tézis. *Numerikus kísérletek segítségével megmutattam, hogy a nyitott áramlásokban sodródó részecskék bonyolult eloszlása tökéletlen keveredéshez vezet, amely lehetővé teszi versengő planktonpopulációknak a hagyományos populációdinamikai egyenletek által kizárt együttélését. A nyitott hidrodinamikai áramlások mechanikai tulajdonságai erősítik a biodiverzitást.*

Az együttélés problémája nemcsak ezen a területen merül fel, az a korai evolúciónak is egy központi kérdése. Az önreprodukálódó makromolekulák együttélése (Maynard Smith és Szathmáry, 1995) szükséges ahhoz, hogy a *korai evolúció 22-es csapdáját* (Maynard Smith, 1983) fel lehessen oldani, és ebben segíthet, ha figyelembe vesszük, hogy az ősrészen a makromolekulák szálas alakzatokon helyezkedhettek el (Károlyi *et al.*, 2000, 2002; Scheuring *et al.*, 2003a).

A dolgozat harmadik részében a növekedő szálak mechanikai modellezésével foglalkoztunk. Először a szálakból álló, telepeket alkotó gombák és *Actinomyces* baktériumfajok növekedését modelleztük. A szálak mindig a csúcsuknál növekszenek, míg a falépítő-anyagok a szálak teljes hosszán szintetizálódnak, és a növekvő csúcsokhoz szállítódnak. A szál növekedésének korábbi modelljei mindig valamilyen biológiai megfigyelésből vagy feltevésből indultak ki, de egyetlen alkalommal sem vizsgálták meg, hogy a kapott szálalakok vajon valóban lehetségesek-e kinematikai szempontból. Ezért felírtuk a szál hosszmetriájának kontúrjára a növekvő görbékre vonatkozó kinematikai egyenleteket azzal a feltételezéssel, hogy a növekvő szál alakja nem változik meg, csak állandó sebességgel halad, és a súrlódás elkerülése érdekében mindig a felületre merőlegesen növekszik. Ezután egy példát mutattunk rá, hogyan lehet

realisztikus modelljét adni a növekvő baktérium- és gombafonalaknak. Goriely *et al.* (2005) cikke alapján kimondható volt a következő tézis:

6. tézis. *Szálas baktériumok és gombafonalak növekedési jellemzőire kinematikai modellt dolgoztam ki. A baktériumok illetve gombafonalak hosszszerszínének kontúrját növekedésre képes szálnak tekintve felírtam az általános kompatibilitási egyenleteket. A szálas baktériumok és gombafonalak alakját jól közelítő megoldás adódott egy heurisztikus biológiai feltevessel, miszerint a növekedés a görbülettel arányos.*

A szálas mikroorganizmusok jelentőségét az adja, hogy a világ antibiotikum-, enzim- és citromsav-termelésének jelentős része ezen fajok termesztésével zajlik. Ehhez azonban nem árt tudni, hogy mikor éri el a szálas kolónia fejlődésének azt a szakaszát, amikor a kolónia közepe már annyira sűrű, hogy nem jut tápanyaghoz, akkor indul be ugyanis az antibiotikum termelés. Viszont mindeddig nem volt olyan modell, amely a kolónia fejlődésének minden szakaszát le tudta volna írni a kezdeti exponenciális fejlődéstől a végső telítődésig. Figyelembe véve a kolónia mérésekben tapasztalt időfüggő fraktálszerkezetét, sikerült egy biomechanikai modellt felépíteni, amely képes a kolónia viselkedését leírni életének mindegyik fázisában. Károlyi (2004, 2005) cikkei alapján megfogalmazható a következő tézis:

7. tézis. *Szálakból álló gombatelepek és baktériumkolóniák növekedésének mechanikai modelljét sikerült levezetni, amely a telep fraktáldimenziójának időbeli változásán alapul. A kolónia teljes tömegére és a fraktáldimenzió időfüggésére egy csatolt egyenlet adódott, amelynek megoldása jól közelíti a valós mérésekből és a saját numerikus szimulációimból nyert eredményeket.*

Időfüggő dimenzióval jellemezhető szálas struktúrák nemcsak a szálas mikroorganizmusok között fordulnak elő, hanem ahogy azt Wonhas és Vassilicos (2002) javasolta, zárt hidrodinamikai áramlásokban is. A baktérium- és gombafonalak esetén követett gondolatmenetet alkalmazni lehetett a zárt áramlásokban zajló kémiai aktivitás esetében is, ennek eredménye egy olyan reakcióegyenlet, amelyben a kémiaileg aktív anyag mennyiségére és az időfüggő fraktáldimenzióra vonatkozó egyenletek csatolódtak. Károlyi és Tél (2005) cikke alapján ebből is megfogalmazható egy tézis:

8. tézis. *Kimutattam, hogy zárt hidrodinamikai áramlásokban a sodródó részecskék egy időben változó dimenzióval leírható, szálas alakzaton gyülekeznek. Ha a sodródó részecskék kémiai reakciókban vesznek részt, akkor az időfüggő szálasságot leíró fraktáldimenzió és az anyagmennyiség egy csatolt differenciálegyenlet-rendszerrel írható le. A kémiai reakciók zárt áramlásokban is erősen függenek az áramlás mechanikai tulajdonságaitól.*

Megmutattuk, hogy a zárt áramlásban zajló kémiai reakció egyenletének speciális eseteként megkapható a korábban a nyitott áramlásra kapott egyenletünk is. A dolgozatban utaltunk rá, hogy bár az eredményeket kétdimenziós, hiperbolikus áramlásban passzívan sodródó részecskék autokatalitikus reakciói esetén mutattuk be, azok kiterjeszthetők egyéb esetekre is. Ezt részben saját cikkeik, részben mások munkái mutatják be. Egy nemrégiben megjelent terjedelmes összefoglaló cikkünk (Tél *et al.*, 2005) részletesen tartalmazza ezeket az eseteket. A

kémiai reakcióegyenletekben felbukkan a fraktálságot jellemző dimenzió akkor is, ha az áramlás három dimenziós (de Moura és Grebogi, 2004a), nem periodikus (Károlyi *et al.*, 2004), nem hiperbolikus (Motter *et al.*, 2003; de Moura és Grebogi, 2004b); ha a sodródó részecskéknek van tehetetlensége (Nishikawa *et al.*, 2001, 2002; Tél *et al.*, 2004); és ha másfajta reakció zajlik (Károlyi *et al.*, 1999; Neufeld *et al.*, 2002a,b; Kiss *et al.*, 2003a,b; Scheuring *et al.*, 2003b).

Köszönetnyilvánítás

Elsőként azoknak szeretném köszönetemet kifejezni, akikkel az évek során volt alkalmam együtt dolgozni, és akiktől oly sokat tanulhattam a közös munka során. Talán elsőként is köszönöm Tél Tamásnak, aki nem csak mély szakmai ismereteinek egy részét csepegtette át belém, hanem sosem lankadó munkabírása és türelme miatt talán a legnagyobb hatást tette rám munkám során. Köszönet illeti továbbá Domokos Gábort, aki PhD disszertációm témavezetője volt, és akihez azóta is bátran fordulhatok segítségért bármilyen szakmai vagy egyéb kérdésben. Meg kell említeni Gáspár Zsoltot is, aki az évek során oly sokszor nyújtott segítséget, az ő támogatása nélkül nem készülhetett volna el sem ez a dolgozat, sem azok az eredmények, amelyeken a dolgozat alapul. De a többiek, akikkel az évek során együtt dolgoztam, mind nagy hatással voltak szemléletmódomra, köszönet ezért Scheuring Istvánnak, Toroczka Zoltánnak, Neufeld Zoltánnak, Kocsis Attilának, Péntek Áronnak, Kapsza Enikőnek, Celso Grebogi-nak, Alain Goriely-nek, Michael Tabor-nak és Alessandro de Moura-nak.

Szeretném megköszönni a támogatást és segítséget munkahelyem, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Tartószerkezetek Mechanikája Tanszéke valamennyi dolgozójának, köztük azoknak, akik a tanszéket vezették, mialatt itt dolgoztam: Kaliszky Sándornak, Kurutzné Kovács Mártának és Gáspár Zsoltnak.

A dolgozat kéziratának gondos átolvasásáért és a hasznos tanácsokért köszönet illeti Gáspár Zsoltot, Tarnai Tibort, Domokos Gábort, Tél Tamást, Németh Róbertet, Kovács Flóriánt és Kocsis Attilát.

A dolgozatban bemutatott eredmények elérését nem kis mértékben anyagilag segítették a következő ösztöndíjak: The Thomas Chalnoky Foundation, Korányi Ösztöndíj; Magyar Tudományos Akadémia, Bolyai János Kutatási Ösztöndíj; Soros Alapítvány, Belföldi Doktorandusz Ösztöndíj; Felsőoktatási Pályázatok Irodája, Békésy György Posztdoktori Ösztöndíj. A munkafeltételek megteremtése lehetetlen lett volna a következők anyagi támogatása nélkül: Országos Tudományos Kutatási Alapprogram; Magyar-Brit Kormányközi Tudományos és Technológiai Együttműködési Program; Magyar-Amerikai Közös Alap; Művelődési és Közoktatási Minisztérium, Felsőoktatási Kutatási és Fejlesztési Pályázat.

Végezetül, szeretném megköszönni családomnak a türelmet és támogatást, hiszen a dolgozat elkészítésével töltött időt tőlük raboltam el.

Irodalomjegyzék

- E.R. Abraham 1998: The generation of plankton patchiness by turbulent stirring. *Nature* **391**, 577–580.
- E.R. Abraham, C.S. Law, P.W. Boyd, S.J. Lavender, M.T. Maldonado, A.R. Bowie 2000: Importance of stirring in the development of an iron-fertilized phytoplankton bloom. *Nature* **407**, 727–730.
- H.M. Ådland, A. Mikkelsen 2004: Brownian dynamics simulations of needle chain and nugget chain polymer models—rigid constraint conditions versus infinitely stiff springs. *Journal of Chemical Physics* **120**, 9848–9858.
- S. Albeverio, I.L. Nizhnik 2001: Spatial chaos in a fourth-order nonlinear parabolic equation. *Physics Letters A* **288**, 299–304.
- S.S. Antman 1995: *Nonlinear problems of elasticity*. Springer, New York.
- H. Aref 1984: Stirring by chaotic advection. *Journal of Fluid Mechanics* **143**, 1–21.
- H. Aref (Ed.) 1994: *Chaos Applied to Fluid Mixing*. Special issue of *Chaos, Solitons and Fractals* **4**.
- H. Aref, S.W. Jones, S. Mofina, I. Zawadski 1989: Vortices, kinematics and chaos. *Physica D* **37**, 423–440.
- P.E. Arratia, J.P. Gollub 2006: Predicting the progress of diffusively limited chemical reactions in the presence of chaotic advection. Megjelenés alatt: *Physical Review Letters*.
- R. Badii, A. Politi 1997: *Complexity: Hierarchical structures and scaling in physics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- S. Bartnicki-Garcia, F. Hergert, G. Gierz 1989: Computer simulation of fungal morphogenesis and the mathematical basis for hyphal (tip) growth. *Protoplasma* **153**, 46–57.
- M. Beck 1952: Die knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten stabes. *Z. Angew. Math. Phys.* **3**, 225–228.
- I.J. Benczik, G. Károlyi, I. Scheuring, T. Tél 2006: Coexistence of inertial competitors in chaotic flows. Közlésre benyújtva a *Physical Review E* c. folyóirathoz.

- I.J. Benczik, Z. Toroczka, T. Tél 2002: Selective sensitivity of open chaotic flows on inertial tracer advection: Catching particles with a stick. *Physical Review Letters* **89**, 164501/1–4.
- I.J. Benczik, Z. Toroczka, T. Tél 2003: Advection of finite-size particles in open flows. *Physical Review E* **67**, 036303/1–11.
- L. Boddy, J.M. Wells, C. Culshaw, D.P. Donnelly 1999: Fractal analysis in studies of mycelium in soil. *Geoderma* **88**, 301–328.
- N.M. Bou-Rabee, L.A. Romero, A.G. Salinger 2002: A multiparameter, numerical stability analysis of a standing cantilever conveying fluid. *SIAM Journal of Applied Dynamical Systems* **1**, 190–214.
- P.W. Boyd, A.J. Watson, C.S. Law, E.R. Abraham, T. Trull, R. Murdoch, D.C.E. Bakker, A.R. Bowie, K.O. Buesseler, H. Chang, M. Charette, P. Croot, K. Downing, R. Frew, M. Gall, M. Hadfield, J. Hall, M. Harvey, G. Jameson, J. LaRoche, M. Liddicoat, R. Ling, M.T. Maldonado, R.M. McKay, S. Nodder, S. Pickmere, R. Pridmore, S. Rintoul, K. Safi, P. Sutton, R. Strzepek, K. Tanneberger, S. Turner, A. Waite, J. Zeldis 2000: A mesoscale phytoplankton bloom in the polar Southern Ocean stimulated by iron fertilization. *Nature* **407**, 695–702.
- J. Chaiken, R. Chevray, M. Tabor, Q.M. Tan 1986: Experimental study of Lagrangian turbulence in a Stokes flow. *Proc. Roy. Soc. London A* **408**, 165–174.
- K.F. Chater, R. Losick 1997: Mycelial life style of *Streptomyces coelicolor* A3(2) and its relatives. In: J.A. Shapiro, M. Dworkin (Eds): *Bacteria as Multicellular Organisms*. pp. 149–182, Oxford University Press, Oxford.
- B.D. Coleman, W.K. Olson, D. Swigon 2003: Theory of sequence-dependent DNA elasticity. *Journal of Chemical Physics* **118**, 7127–7140.
- B.D. Coleman, D. Swigon 2000: Supercoiled configurations with self-contact in the theory of the elastic rod model for DNA plasmid. *Journal of Elasticity* **60**, 173–221.
- B.D. Coleman, D. Swigon, I. Tobias 2000: Elastic stability of DNA configurations. II. Supercoiled plasmids with self-contact. *Physical Review E* **61**, 759–770.
- B.D. Coleman, I. Tobias, D. Swigon 1995: Theory of the influence of end conditions on self-contact in DNA loops. *Journal of Chemical Physics* **103**, 9101–9109.
- J.H. Connell 1978: Diversity in tropical rain forests and coral reefs. *Science* **199**, 1302–1310.
- M.G. Crandall, P.H. Rabinowitz 1970: Sturm-Liouville eigenvalue problems and topological degree. *J. Math. Mech* **19**, 1083–1102.
- A. Crisanti, M. Falcioni, G. Paladin, A. Vulpiani 1991: Lagrangian chaos: Transport, mixing and diffusion in fluids. *Rivista del Nuovo Cimento* **14**, 1–80.
- M.C. Cross, P.C. Hohenberg 1993: Pattern formation outside of equilibrium. *Reviews of Modern Physics* **65**, 851–1112.

- T. Czárán, E. Szathmáry 2000: Coexistence of replicators in prebiotic evolution. In: U. Dieckmann, R. Law, J.A.J. Metz (Eds): *The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- G.Z. Damköhler 1936: Einflüsse der Strömung, Diffusion und des Wärmeüberganges auf die Leistung von Reaktionsöfen. *Zeitschrift Elektrochemie Angew. Phys. Chem.* **42**, 846–862.
- D. da Riva Ricci, B. Kendrick 1972: Computer modelling of hyphal tip growth in fungi. *Canadian Journal of Botany* **50**, 2455–2462.
- M.A. Davies, F.C. Moon 1993: 3D spatial chaos in the elastica and the spinning top: Kirchhoff analogy. *Chaos* **3**, 93–99.
- A.P.S. de Moura, C. Grebogi 2004a: Chemical and biological activity in three-dimensional flows. *Physical Review E* **70**, 026218.
- A.P.S. de Moura, C. Grebogi 2004b: Reactions in flows with nonhyperbolic dynamics. *Physical Review E* **70**, 036216.
- A. Dhar, D. Chaudhuri 2002: Triple minima in the free energy of semiflexible polymers. *Physical Review Letters* **89**, 065502.
- G. Domokos 1997: Static solitary waves as limits of discretization: a plausible argument. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A* **355**, 2099–2116.
- G. Domokos, T.J. Healey 2005: Multiple helical perversions of finite, intrinsically curved rods. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **15**, 871–890.
- G. Domokos, P. Holmes 1993: Euler's problem, Euler's method, and the standard map; or, the discrete charm of buckling. *Journal of Nonlinear Science* **3**, 109–151.
- L. Edelstein, Y. Hadar, I. Chet, Y. Henis, L.A. Segel 1983: A model for fungal colony growth applied to *Sclerotium rolfsii*. *Journal of General Microbiology* **129**, 1873–1881.
- S. Edouard, B. Legras, F. Lefèvre, R. Eymard 1996a: The effect of small-scale inhomogeneities on ozone depletion in the Arctic. *Nature* **384**, 444–447.
- S. Edouard, B. Legras, V. Zeitlin 1996b: The effect of dynamical mixing in a simple model of the ozone hole. *J. Geophys. Res.* **101**, 16771–16778.
- V.M. Eguíluz, E. Hernández-García, O. Piro, S. Balle 1999: Frozen spatial chaos induced by boundaries. *Physical Review E* **60**, 6571–6579.
- D. Elhmailidi, A. Provenzale, A. Babiano 1993: Elementary topology of two-dimensional turbulence from a Lagrangian viewpoint and single-particle dispersion. *Journal of Fluid Mechanics* **257**, 533–558.
- M.S. El Naschie 1990: On the susceptibility of local elastic buckling to chaos. *ZAMM* **70**, 535–542.

- I.R. Epstein 1995: The consequences of imperfect mixing in autocatalytic chemical and biological systems. *Nature* **374**, 321–327.
- L. Euler 1744: Additamentum I de curvis elasticis, methodus inveniendi lineas curvas maximi minimi proprietate gaudentes. In: *Opera Omnia I*, vol. 24, Bousquet, Lusanne, pp. 231–297.
- K. Falconer 1990: *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications*. Wiley, Chichester.
- R.A. Fisher 1937: The wave of advance of advantageous genes. *Proc. Ann. Symp. Eugen. Soc. (London)* **7**, 355–369.
- Zs. Gáspár, G. Domokos 1989: Global investigation of discrete models of the Euler buckling problem. *Acta Technica Acad. Sci. Hung.* **102**, 227–238.
- Zs. Gáspár, R. Németh 2004: Discrete model of twisted rings. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences* **11**, 211–222.
- R. Gaines 1974: Difference equations associated with boundary value problems for second order nonlinear ordinary differential equations. *SIAM Journal of Numerical Analysis* **11**, 411–434.
- G.F. Gause, A.A. Witt 1935: Behavior of mixed populations and the problem of natural selections. *American Naturalist* **69**, 596–609.
- G. Georgiou, M.L. Shuler 1986: A computer model for the growth and differentiation of a fungal colony on solid substrate. *Biotechnology and Bioengineering* **28**, 405–416.
- M. Giona, A. Adrover 2001: Global geometry and coarse-grained formulation of the evolution of pointwise intermaterial interface measure in chaotic flows. *Chem. Eng. Sci.* **56**, 3387–3399.
- M. Giona, A. Adrover, F.J. Muzzio, S. Cerbelli, M.M. Alvarez 1999: The geometry of mixing in time-periodic chaotic flows. I. Asymptotic directionality in physically realizable flows and global invariant properties. *Physica D* **132**, 298–324.
- R.E. Goldstein, A. Goriely, G. Huber, C.W. Wolgemuth 2000: Bistable helices. *Physical Review Letters* **84**, 1631–1634.
- A. Goriely, Gy. Károlyi, M. Tabor 2005: Growth induced curve dynamics for filamentary microorganisms. *Journal of Mathematical Biology* **51**, 355–366.
- A. Goriely, M. Tabor 1998: Spontaneous helix hand reversal and tendril perversion in climbing plants. *Physical Review Letters* **80**, 1564–1567.
- A. Goriely, M. Tabor 2000: The nonlinear dynamics of filaments. *Nonlinear Dynamics* **21**, 101–133.

- D.I. Gray G.W. Gooday, J.I. Prosser: Apical hyphal extension in *Streptomyces coelicolor* A3(2). *Journal of General Microbiology* **136**, 1077–1084.
- J.-U. Grooß, P. Konopka, R. Müller 2005: Ozone chemistry during the 2002 Antarctic vortex split. *Journal of Atmospheric Sciences* **62**, 860–870.
- S.N. Grove, C.E. Bracker 1970: Protoplasmic organization of hyphal tips among fungi: Vesicles and Spitzenkörper. *Journal of Bacteriology* **104**, 989–1009.
- W.S.C. Gurney, R.M. Nisbet 1998: *Ecological dynamics*. Oxford University Press, Oxford.
- G. Hardin 1960: The competitive exclusion principle. *Science* **131**, 1292–1298.
- T.J. Healey 1988a: A group-theoretic approach to computational bifurcation problems with symmetry. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **67**, 257–295.
- T.J. Healey 1988b: Global bifurcation and continuation in the presence of symmetry with an application to solid mechanics. *SIAM Journal of Mathematical Analysis* **19**, 824–840.
- T.J. Healey, H. Kielhöfer 1991: Symmetry and nodal properties in the global bifurcation analysis of quasi-linear elliptic equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **113**, 299–311.
- T.J. Healey, H. Kielhöfer 1993: Preservation of nodal structure on global bifurcating solution branches of elliptic equations with symmetry. *Journal of Differential Equations* **106**, 70–89.
- I. Hegedűs 1986: Analysis of lattice single layer cylindrical structures. *Journal of Space Structures* **2**, 87–89.
- P. Holmes, G. Domokos, J. Schmitt, I. Szeberényi 1999: Constrained Euler buckling: an interplay of computation and analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **170**, 175–207.
- P. Holmes, G. Domokos, G. Hek 2000: Euler buckling in a potential field. *Journal of Nonlinear Science* **10**, 477–505.
- G.W. Hunt, R. Lawther, P. Providência E Costa 1997: Finite element modelling of spatially chaotic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **40**, 2237–2256.
- G.E. Hutchinson 1961: The paradox of the plankton. *American Naturalist* **95**, 137–147.
- S.A. Hutchinson, P. Sharma, K.R. Clarke, I. MacDonald 1980: Control of hyphal orientation in colonies of *Mucor Hiemalis*. *Transactions of the British Mycological Society* **75**, 177–191.
- L. Ikasari, D.A. Mitchell 2000: Two-phase model of the kinetics of growth of *Rhizopus oligosporus* in membrane culture. *Biotechnology and Bioengineering* **68**, 619–627.

- S.C. Jana, G. Metcalfe, J.M. Ottino 1994: Experimental and computational studies of mixing in complex Stokes flows: The vortex mixing flow and multicellular cavity flows. *Journal of Fluid Mechanics* **269**, 199–246.
- C. Jung, E. Ziemniak 1992: Hamiltonian scattering chaos in a hydrodynamical system. *Journal of Physics A* **25**, 3929–3943.
- C. Jung, T. Tél, E. Ziemniak 1993: Application of scattering chaos to particle transport in a hydrodynamical flow. *Chaos* **3**, 555–568.
- H. Kantz, P. Grassberger 1985: Repellers, semi-attractors, and long-lived chaotic transients. *Physica D* **17**, 75–86.
- E. Kapsza, Gy. Károlyi, S. Kovács, G. Domokos: Regular and random patterns in complex bifurcation diagrams. *Discrete and Continuous Dynamical Systems B* **3**, 519–540.
- Gy. Károlyi 1996: Chaotic advection in two-dimensional flows. In: G.L. Balázs (Ed.): *Proceedings of the 1-st International Ph. D. Symposium*, Technical University of Budapest, pp. 183–188.
- Gy. Károlyi 1998: *Examination of spatial chaotic equilibrium states of chains*. Ph.D. disszertáció, Budapesti Műszaki Egyetem.
- Gy. Károlyi 2003: Locsolócső és DNS: Létezik-e térbeli káosz? *Természet Világa* **134**, 440–443.
- Gy. Károlyi 2004: Role of fractality in growth of filamental colonies. In: *Proceedings of the First Hungarian Conference on Biomechanics*, Research Center for Biomechanics, Budapest University of Technology and Economics, pp. 182–190.
- Gy. Károlyi 2005: Fractal scaling of microbial colonies affects growth. *Physical Review E* **71**, 031915/1–6.
- Gy. Károlyi, G. Domokos 1998: Rúdláncok egyensúlyi helyzetének aszimptotikus stabilitása. In: *Az MTA-BME Mechanikai Kutatóközösség VI. Tudományos Ülésszakán elhangzott előadások*, Budapesti Műszaki Egyetem, pp. 15–20.
- Gy. Károlyi, G. Domokos: Symbolic dynamics of infinite depth: finding global invariants for BVPs. *Physica D* **134** (1999) 316–336.
- Gy. Károlyi, Z. Neufeld, I. Scheuring 2005: Rock-scissors-paper game in a chaotic flow: The effect of dispersion on the cyclic competition of microorganisms. *Journal of Theoretical Biology* **236**, 12–20.
- Gy. Károlyi, Á. Péntek, I. Scheuring, T. Tél, Z. Toroczkai 2000: Chaotic flow: the physics of species coexistence. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **97**, 13661–13665.

- Gy. Károlyi, Á. Péntek, T. Tél, Z. Toroczkai 1997: Chaotic tracer dynamics in open hydrodynamical flows. In: E. Infeld, R. Żelazny, A. Gałkowski (Eds.): *Nonlinear Dynamics, Chaotic and Complex Systems*, pp. 24–38. Cambridge University Press, Cambridge.
- Gy. Károlyi, Á. Péntek, Z. Toroczkai, T. Tél, C. Grebogi 1999: Chemical or biological activity in open chaotic flows. *Physical Review E* **59**, 5468–5481.
- Gy. Károlyi, I. Scheuring, T. Czárán 2002: Metabolic network dynamics in open chaotic flow. *Chaos* **12**, 460–469.
- Gy. Károlyi, T. Tél 1997: Chaotic tracer scattering and fractal basin boundaries in a blinking vortex-sink system. *Physics Reports* **290**, 125–147.
- Gy. Károlyi, T. Tél 2005: Chemical transients in closed chaotic flows: The role of effective dimensions. *Physical Review Letters* **95**, 264501/1–4.
- Gy. Károlyi, T. Tél, A.P.S. de Moura, C. Grebogi 2004: Reactive particles in random flows. *Physical Review Letters* **92**, 174101/1–4.
- G. Kirchhoff 1859: Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes. *Crelle Journal für Mathematik* **56**, 285–313.
- I.Z. Kiss, J.H. Merkin, S.K. Scott, P.L. Simon, S. Kalliadasis, Z. Neufeld 2003a: The structure of flame filaments in chaotic flows. *Physica D* **176**, 67–81.
- I.Z. Kiss, J.H. Merkin, Z. Neufeld 2003b: Combustion initiation and extinction in a 2D chaotic flow. *Physica D* **183**, 175–189.
- A.L. Koch 1982: The shape of the hyphal tips of fungi. *Journal of General Microbiology* **128**, 947–951.
- A.L. Koch, M.L. Higgins, R.J. Doyle 1981: Surface tension-like forces determine bacterial shapes: *Streptococcus faecium*. *Journal of General Microbiology* **123**, 151–161.
- A. Kocsis, Gy. Károlyi 2005: Buckling under conservative and nonconservative load: conservative spatial chaos. Közlésre elfogadva a *Periodica Polytechnica* c. folyóirathoz.
- A. Kocsis, Gy. Károlyi 2006: Conservative spatial chaos of buckled elastic linkages. Közlésre benyújtva a *Chaos* c. folyóirathoz.
- A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovski, N.S. Piskunov 1937: Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application a un problème biologique. *Moscow University Bulletin of Mathematics* **1**, 1–25.
- V. Kotov, S.V. Reshetnikov 1990: A stochastic model for early mycelial growth. *Mycological research* **94**, 577–586.
- K. Kroy, E. Frey: Force-extension relation and plateau modulus for wormlike chains. *Physical Review Letters* **77**, 306–309.

- H. Lamb 1932: *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- L.D. Landau, E.M. Lifsic 1988: *Elméleti fizika VI: Hidrodinamika*. Tankönyvkiadó, Budapest.
- R. Lejeune, G.V. Baron 1997: Simulation of growth of a filamentous fungus in 3 dimensions. *Biotechnology and Bioengineering* **53**, 139–150.
- Z.J. Li, V. Shukla, A.P. Fordyce, A.G. Pedersen, K.S. Wenger, M.R. Marten 2000: Fungal morphology and fragmentation behavior in a fed-batch *Aspergillus oryzae* fermentation at the production scale. *Biotechnology and Bioengineering* **70**, 300–312.
- A.J. Lichtenberg, M.A. Liebermann 1982: *Regular and stochastic motion*. Springer, New York.
- T. Lipniacki 1998: Non-linear mechanical model of DNA dynamics. *Il Nuovo Cimento D* **20**, 833–843.
- T. Lipniacki 1999: Chemically driven traveling waves in DNA. *Physical Review E* **60**, 7253–7261.
- J.M. López, H.J. Jensen 2002: Generic model of morphological changes in growing colonies of fungi. *Physical Review E* **65**, 021903/1–5.
- A.E.H. Love 1893: *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge University Press, Cambridge.
- J.H. Maddocks 1984: Stability of nonlinearly elastic rods. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **85**, 311–354.
- B.B. Mandelbrot 1977: *The fractal geometry of Nature*. Freeman, New York.
- A. Mariotti, C.R. Mechoso, B. Legras, V. Daniel 2000: The evolution of the ozone „collar” in the Antarctic lower stratosphere during early August 1994. *J. Atmospheric Sciences* **57**, 402–414.
- A.P. Martin 2003: Phytoplankton patchiness: the role of lateral stirring and mixing. *Progress in Oceanography* **57**, 125–174.
- J. Maynard Smith 1983: Models of evolution. *Proc. Roy. Soc. London B* **219**, 315–325.
- J. Maynard Smith, E. Szathmáry 1995: *The major transitions in evolution*. Freeman, Spektrum, Oxford.
- B. Mergell, M.R. Ejtehadi, R. Everaers 2003: Modeling DNA structure, elasticity, and the deformations at the base-pair level. *Physical Review E* **68**, 021911.
- G. Metcalfe, J.M. Ottino 1994: Autocatalytic processes in mixing flows. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2875–2878.

- C. Micheletti, J.R. Banavar, A. Maritan 2001: Conformation of proteins in equilibrium. *Physical Review Letters* **87**, 088102.
- A. Mielke, P. Holmes 1988: Spatially complex equilibria of buckled rods. *Archives of Rational Mechanics and Analysis* **101**, 319–348.
- N.P. Money 1997: Wishful thinking of turgor revisited: The mechanics of fungal growth. *Fungal Genetics and Biology* **21**, 173–187.
- A.E. Motter, Y.-C. Lai, C. Grebogi 2003: Reactive dynamics of inertial particles in nonhyperbolic chaotic flows. *Physical Review E* **68**, 056307.
- F.J. Muzzio, M. Liu 1996: Chemical reactions in chaotic flows. *The Chemical Engineering Journal* **64**, 117–127.
- F.J. Muzzio, J.M. Ottino 1989: Dynamics of a lamellar system with diffusion and reaction: Scaling analysis and global kinetics. *Physical Review A* **40**, 7182–7192.
- Z. Neufeld 2001: Excitable media in a chaotic flow. *Physical Review Letter* **87**, 108301.
- Z. Neufeld, C. López, E. Hernández-García, O. Piro 2002a: Excitable media in open and closed chaotic flows. *Physical Review E* **66**, 066208.
- Z. Neufeld, P.H. Haynes, T. Tél 2002b: Chaotic mixing induced transitions in reaction-diffusion systems. *Chaos* **12**, 426–438.
- S. Newhouse, T. Pignataro 1993: On the estimation of topological entropy. *J. Stat. Phys.* **72**, 1331–1351.
- T. Nishikawa, Z. Toroczkai, T. Tél 2001: Advective coalescence in chaotic flows. *Physical Review Letters* **87**, 038301.
- T. Nishikawa, Z. Toroczkai, C. Grebogi, T. Tél 2002: Finite-size effects on active chaotic advection. *Physical Review E* **65**, 026216.
- M. Obert, P. Pfeifer, M. Sernetz 1990: Microbial growth patterns described by fractal geometry. *Journal of Bacteriology* **172**, 1180–1185.
- W.K. Olson, D. Swigon, B.D. Coleman 2004: Implications of the dependence of the elastic properties of DNA on nucleotide sequence. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A* **362**, 1403–1422.
- E. Ott 1993: *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge.
- J.M. Ottino 1989: *The kinematics of mixing: stretching, chaos and transport*. Cambridge University Press, Cambridge.
- J.M. Ottino 1990: Mixing, chaotic advection, and turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics* **22**, 207–254.

- J.M. Ottino, A. Souvaliotis, G. Metcalfe 1995: Chaotic mixing processes: New problems and computational issues. *Chaos, Solitons, Fractals* **6**, 425–438.
- D.B. Patankar, T.-C. Liu, T. Oolman 1993: A fractal model for the characterization of mycelial morphology. *Biotechnology and Bioengineering* **42**, 571–578.
- H. O. Peitgen, D. Saupe, K. Schmitt 1981: Nonlinear elliptic boundary value problems versus their finite difference approximations: numerically irrelevant solutions. *Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik* **322**, 74–117.
- Á. Péntek, Gy. Károlyi, I. Scheuring, T. Tél, Z. Toroczkai, J. Kadtké, C. Grebogi 1999: Fractality, chaos, and reactions in imperfectly mixed open hydrodynamical flows. *Physica A* **274**, 120–131.
- Á. Péntek, T. Tél, Z. Toroczkai 1995a: Chaotic advection in the velocity field of leapfrogging vortex pair. *Journal of Physics A* **28**, 2191–2216.
- Á. Péntek, T. Tél, Z. Toroczkai 1995b: Fractal tracer patterns in open hydrodynamical flows: The case of the leapfrogging vortex pairs. *Fractals* **3**, 33–53.
- Á. Péntek, T. Tél, Z. Toroczkai 1996: Transient chaotic mixing in open hydrodynamical flows. *International Journal of Bifurcations and Chaos* **6**, 2619–2625.
- Á. Péntek, Z. Toroczkai, T. Tél, C. Grebogi, J.A. Yorke 1995c: Fractal boundaries in open hydrodynamical flows: Signatures of chaotic saddles. *Physical Review E* **51**, 4076–4088.
- R.T. Pierrehumbert 1994: Tracer microstructure in the large-eddy dominated regime. *Chaos, Solitons, Fractals* **4**, 1091–1110.
- S.J. Pirt 1967: A kinetic study of the mode of growth of surface colonies of bacteria and fungi. *Journal of General Microbiology* **47**, 181–197.
- Gy. Popper 1978: A Beck-féle stabilitásfeladat viszkó-elasztikus rúd esetén. *Építés- és Építészettudomány* **10**, 31–43.
- J.I. Prosser, A.J. Tough 1991: Growth mechanisms and growth kinetics of filamentous microorganisms. *Critical Reviews in Biotechnology* **10**, 253–274.
- J.I. Prosser, A.P.J. Trinci 1979: A model for hyphal growth and branching. *Journal of General Microbiology* **111**, 153–164.
- C.M. Regalado, B.D. Sleeman, K. Ritz 1997: Aggregation and collapse of fungal wall vesicles in hyphal tips: a model for the origin of the Spitzenkörper. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B* **352**, 1963–1974.
- C.M. Regalado, B.D. Sleeman 1999: Aggregation and collapse in a mechanical model of fungal tip growth. *Journal of Mathematical Biology* **39**, 109–138.

- M.O. Reinhardt 1892: Das wachsthum der pilzhyphen. *Jahrbücher für wissenschaftliche botanik* **23**, 479–566.
- V. Rom-Kedar, A. Leonard, S. Wiggins 1990: An analytical study of transport, mixing and chaos in an unsteady vortical flow. *Journal of Fluid Mechanics* **214**, 347–394.
- V. Rom-Kedar, A.C. Poje 1999: Universal properties of chaotic transport in the presence of diffusion. *Physics of Fluids* **11**, 2044–2057.
- M.C. Ruzicka, M. Fridrich, M. Burkhard 1995: A bacterial colony is not self-similar. *Physica A* **216**, 382–385.
- J. Samual, S. Sinha: Elasticity of semiflexible polymers. *Physical Review E* **66**, 050801(R).
- P.T. Saunders, A.P. J. Trinci 1979: Determination of tip shape in fungal hyphae. *Journal of General Microbiology* **110**, 469–473.
- I. Scheuring, T. Czárán, P. Szabó, Gy. Károlyi, Z. Toroczkai 2003a: Spatial models of prebiotic evolution: Soup before pizza? *Origins of Life and Evolution of the Biosphere* **33**, 319–355.
- I. Scheuring, Gy. Károlyi, Á. Péntek, T. Tél, Z. Toroczkai 2000: A model for resolving the plankton paradox: coexistence in open flows. *Freshwater Biology* **45**, 123–132.
- I. Scheuring, Gy. Károlyi, Z. Toroczkai, T. Tél, Á. Péntek 2003b: Competing populations in flows with chaotic mixing. *Theoretical Population Biology* **63**, 77–90.
- K. Shariff, A. Leonard, N.J. Zabusky, J.H. Ferziger 1988: Acoustics and dynamics of coaxial interacting vortex rings. *Fluid Dyn. Res.* **3**, 337–343.
- K. Shariff, T.H. Pulliam, J.M. Ottino 1991: A dynamical system analysis of kinematics in the time-periodic wake of a circular cylinder. *Lect. Appl. Math.* **28**, 613–646.
- S. Solomon 1999: Stratospheric ozone depletion: A review of concepts and history. *Reviews of Geophysics* **37**, 275–316.
- T.H. Solomon, J.P. Gollub 1988: Chaotic particle transport in time-dependent Rayleigh-Bénard convection. *Physical Review A* **38**, 6280–6286.
- J.C. Sommerer, H.-C. Ku, H.E. Gilreath 1996: Experimental evidence for chaotic scattering in a fluid wake. *Physical Review Letters* **77**, 5055–5058.
- J.C. Sommerer, E. Ott 1993: Particles floating on moving fluid: A dynamically comprehensible physical fractal. *Science* **259**, 335–339.
- G.C. Steele, A.P.J. Trinci 1975: Morphology and growth kinetics of hyphae of differentiated and undifferentiated mycelia of *Neurospora crassa*. *Journal of General Microbiology* **91**, 362–368.

- G. Stolovitzky, T.J. Kaper, L. Sirovich 1995: A simple model of chaotic advection and scattering. *Chaos* **5**, 671–686.
- C. Storm, P.C. Nelson 2003: Theory of high-force DNA stretching and overstretching. *Physical Review E* **67**, 051906.
- Zs. Szabó 1999: Parametric excitation of pipes through fluid flow. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences* **6**, 487–494.
- Zs. Szabó 2000: Bifurcation analysis of a pipe containing pulsatile flow. *Periodica Polytechnica* **44**, 149–160.
- Zs. Szabó 2001: *Nonlinear vibrations of parametrically excited complex mechanical systems*. Ph.D. disszertáció, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem.
- Zs. Szabó 2003: Nonlinear analysis of a cantilever pipe containing pulsatile flow. *Meccanica* **38**, 161–172.
- T. Tél 1988: Fractals, multifractals and thermodynamics (an introductory review). *Z. Naturforsch A* **43**, 1154–1174.
- T. Tél 1990: Transient chaos. In: B.-L. Hao (Ed.): *Directions in Chaos*, pp. 149–211. World Scientific, Singapore.
- T. Tél, A.P.S. de Moura, C. Grebogi, Gy. Károlyi 2005: Chemical and biological activity in open flows: A dynamical system approach. *Physics Reports* **413**, 91–196. Erratum: **415**, 360.
- T. Tél, Gy. Károlyi, Á. Péntek, I. Scheuring, Z. Toroczkai, C. Grebogi, J. Kadtke 2000: Fractality, chaos, reactions, and population dynamics in imperfectly mixed open hydrodynamical flows. *Chaos* **10**, 89–99.
- T. Tél, M. Gruiz 2002: *Kaotikus dinamika*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
- T. Tél, T. Nishikawa, A.E. Motter, C. Grebogi, Z. Toroczkai 2004: Universality in active chaos. *Chaos* **14**, 72–78.
- J.M.T. Thompson, L.N. Virgin 1988: Spatial chaos and localization phenomena in nonlinear elasticity. *Physics Letters A* **126**, 491–496.
- I. Tobias, D. Swigon, B.D. Coleman 2000: Elastic stability of DNA configurations. I. General theory. *Physical Review E* **61**, 747–758.
- Z. Toroczkai, Gy. Károlyi, Á. Péntek, T. Tél 2001: Autocatalytic reactions in systems with hyperbolic mixing: exact results for the active baker map. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **34**, 5215–5235.
- Z. Toroczkai, Gy. Károlyi, Á. Péntek, T. Tél, C. Grebogi 1998: Advection of active particles in open chaotic flows. *Physical Review Letters* **80**, 500–503.

- Z. Toroczkai, Gy. Károlyi, Á. Péntek, T. Tél, C. Grebogi, Y.A. Yorke 1997: Wada dye boundaries in open hydrodynamical flows. *Physica A* **239**, 235–243.
- A.P.J. Trinci 1971: Influence of the width of the peripheral growth zone on the radial growth rate of fungal colonies on solid media. *Journal of General Microbiology* **67**, 325–344.
- A.P.J. Trinci, P.T. Saunders 1977: Tip growth of fungal hyphae. *Journal of General Microbiology* **103**, 243–248.
- M. Van Dyke 1982: *An album of fluid motion*. The Parabolic Press, Stanford.
- J.B. Wilson 1990: Mechanisms of species coexistence: twelve explanations for Hutchinson's 'paradox of the plankton': evidence from New Zealand plant communities. *New Zealand Journal of Ecology* **43**, 17–42.
- J.C. Wohlever, T.J. Healey 1995: A group-theoretic approach to the global bifurcation analysis of an axially compressed cylindrical shell. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **122**, 315–349.
- A. Wonhas, J.C. Vassilicos 2002: Diffusivity dependence of ozone depletion over the midnorthern latitudes. *Physical Review E* **65**, 051111/1–4.
- H. Yang, R. King, U. Riechl, E.D. Gilles 1992a: Mathematical model for apical growth, septation, and branching of mycelial microorganisms. *Biotechnology and Bioengineering* **39**, 49–58.
- H. Yang, U. Riechl, R. King, E.D. Gilles 1992b: Measurements and simulation of the morphological development of filamentous organisms. *Biotechnology and Bioengineering* **39**, 44–48.
- E. Ziemniak, C. Jung, T. Tél 1994: Tracer dynamics in open hydrodynamical flows as chaotic scattering. *Physica D* **76**, 123–146.
- H. Zorski, E. Infeld: Continuum dynamics of a peptide chain. *International Journal of Non-linear Mechanics* **32**, 769–801.